

DÉNOMBREMENT

RAPPELS

Parties d'un ensemble

Nombre de parties (ou sous-ensembles) d'un ensemble E de n éléments : $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$

Applications

Nombre d'applications d'un ensemble E de n éléments vers un ensemble F de p éléments :

$$\text{card}(F^E) = p^n$$

Permutations

Nombre de permutations de n éléments :

$$n! = 1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n$$

Par récurrence : $0! = 1$ et $n! = (n-1)! \times n$

Arrangements (listes sans répétition)

Nombre d'arrangements de p éléments parmi n éléments :

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+2) \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Combinaisons

Nombre de combinaisons de p éléments dans n éléments :

$$\binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Propriétés

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p} \quad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Binôme de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + \dots + \binom{n}{i} a^{n-i} b^i + \dots + b^n$$

Exercices ordinaires de probabilités

Dérangements

Nombre de dérangements de n éléments (permutations où chaque élément change de place) :

$$d(n) = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \frac{n!}{k!} = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right)$$

Surjections

Nombre d'applications surjectives d'un ensemble de n éléments sur un ensemble de p éléments :

$$S(n, 1) = 1 \quad S(n, 2) = 2^n - 2 \quad \sum_{k=1}^{k=p} \binom{p}{k} S(n, p) = p^n$$

$$S(n, p) = \sum_{k=0}^{k=p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$$

Formule du crible de Poincaré

Soit $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille finie de parties de E

$$\text{card} \left(\bigcup_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} A_i \right) = \sum_{i=1}^{i=n} \left((-1)^{i-1} \sum_{\substack{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket, \\ \text{card}(I)=i}} \text{card} \left(\bigcap_{k \in I} A_k \right) \right)$$

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

$$\begin{aligned} \text{card}(A \cup B \cup C) = & \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) \\ & - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Formule de Pascal

$$\sum_{k=q}^{k=n} \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}$$

Formule de Vandermonde

$n \leq \min(a, b)$.

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \sum_{p+q=n} \binom{a}{p} \binom{b}{q}$$

Suites strictement croissantes

$E = \llbracket 1, n \rrbracket$ et $0 < p \leq n$. Le nombre de suites strictement croissantes de p éléments de E est égal à $\binom{n}{p}$.

Chemins sur un quadrillage

Dans un repère quadrillé, le nombre de chemins directs (en suivant le quadrillage) du point $(0, 0)$ au point (p, q) est égal à $\binom{p+q}{p}$.

Suites croissantes

$E = \llbracket 1, n \rrbracket$ et $0 < p \leq n$. Le nombre de suites croissantes de p éléments de E est égal à $\Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p}$.

Combinaisons avec répétition

Une combinaison avec répétition de p éléments pris dans un ensemble E de n éléments est la donnée de p éléments distincts ou non de E . Il y en a :

$$\Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p}$$

Une combinaison avec répétition est aussi une application f de E dans $\llbracket 0, p \rrbracket$ telle que $\sum_{x \in E} f(x) = p$.

Exercices ordinaires de probabilités

Propriété

$\Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p}$ est égal au nombre de listes d'entiers naturels $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ solutions de l'équation :

$$x_1 + x_2 + \dots + x_p = n$$

Partitions ordonnées

Une partition ordonnée de type $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ d'un ensemble E de n éléments est une partition $(E_1, E_2, \dots, E_p)$ de E telle que pour tout i , $\text{card}(E_i) = \alpha_i$.

Il y en a $\frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_p!}$.

Anagrammes

Une anagramme est une suite formée avec toutes les lettres d'un même mot. Avec un mot comportant α_1 lettres a_1 , α_2 lettres $a_2, \dots, \alpha_p$ lettres a_p , on peut composer $\frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_p!}$ anagrammes.

Dénombrement

1 □

Combien d'anagrammes peut-on former avec les lettres du mot OIGNON ?

Reprendre la question précédente, avec le mot OGNON¹.



Il s'agit de placer six lettres à six places dans le mot. Si toutes les lettres étaient différentes, le nombre d'anagrammes serait égal au nombre de permutations de ces six lettres : $6!$. Le mot comporte deux lettres répétées une fois : O et N. Une anagramme correspond donc à $2! \times 2!$ permutations des lettres : celles qui sans toucher aux places du G et du I, transposent les O entre eux ou les N entre eux.

Le nombre d'anagrammes cherché est donc égal à $\frac{6!}{2!2!} = 180$.

Pour OGNON, utilisons une autre méthode : il y a $\binom{5}{2}$ choix pour placer les deux O, il reste alors $\binom{3}{2}$ choix pour les deux N.

Le nombre d'anagrammes est $\binom{5}{2} \times \binom{3}{2} = \frac{5!3!}{3!2!2!} = \frac{5!}{2!2!} = 30$

2 □

Combien d'anagrammes différentes peut-on composer avec les lettres du mot BALKANISATION ?



Le mot comporte 13 lettres, il y a donc $13!$ permutations de ces lettres. La lettre A est présente trois fois : pour une disposition de ces trois A on a $3!$ permutations.

Les lettres I et N sont présentes deux fois, à un mot correspond donc $3! \times 2! \times 2!$ permutations.

Le nombre d'anagrammes est égal à :

$$\frac{13!}{3!2!2!} = 259459200$$

1. On notera le rôle de la réforme de l'orthographe dans la simplification des exercices de mathématiques.

Exercices ordinaires de probabilités

3 □

Combien d'anagrammes peut-on composer en utilisant toutes les lettres du mot FILOZOFI² ?



Le mot a 8 lettres, il y a $\binom{8}{2}$ choix pour placer les deux I, il reste $\binom{6}{2}$ choix pour les deux O, il reste $\binom{4}{2}$ choix pour les deux F, il reste deux places pour le L.

Nombre d'anagrammes :

$$\binom{8}{2} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times 2 = \frac{8!6!4!}{6!2!4!2!2!2!} \times 2 = \frac{8!}{2!2!2!} = 5\,040$$

4 □



Dans un restaurant de Courseulles-sur-mer, trois convives ont à se partager sept douzaines de belons.

Combien y a-t-il de répartitions possibles des huîtres, en les distinguant, sachant que chacun doit en avoir au moins une ?



Il y a 3^{84} applications des huîtres dans les assiettes, dont 3 qui mettent toutes les huîtres dans une seule assiette. Si on retire une assiette, une distribution des huîtres correspond alors à une application des 84 huîtres dans deux assiettes. Parmi ces applications, il y en a 2 qui mettent toutes les huîtres dans une seule assiette. Il y a donc $2^{84}-2$ de ces applications qui mettent au moins une huître dans chacune des deux assiettes. On a 3 manières de retirer une assiette, par conséquent il y a $3 \times (2^{84}-2)$ distributions qui laissent exactement une assiette vide.

Il y a $3^{84}-3 \times (2^{84}-2)-3=3^{84}-3 \times 2^{84}+3$ manières de répartir les 84 huîtres en ne laissant aucune assiette vide.

Remarque : on retrouve $S(84,3)=3^{84}-3 \times 2^{84}+3$.

2. Je suis en avance de quelques réformes.

Dénombrement

5 ☐

Julie a le choix entre quatre confitures différentes pour étaler sur une tartine, une biscotte et un toast.

Combien a-t-elle de possibilités, sachant qu'elle peut éventuellement, en plus de la confiture, les beurrer ?



Julie dispose de huit façons de tartiner chaque type de pain : quatre confitures sans beurre et quatre confitures avec beurre. On doit donc dénombrer les applications de l'ensemble {tartine, biscotte, toast} dans un ensemble de huit éléments : le nombre de possibilités différentes offertes à Julie est donc $8^3 = 512$.

6 ☐

Quatre bridgeurs sont installés. En cours de partie, la répartition des cartes est la suivante :

	♠ A, R, D	
	♥ D, 10	
	♦ 2	
	♣ A, V	
♠ V, 8, 7		♠ 6, 4, 2
♥ 9, 8		♥ A, R
♦ V		♦ A
♣ 2, 3		♣ R, D
	♠ 10, 5, 3	
	♥ V, 3	
	♦ R	
	♣ 10, 9	

Combien y a-t-il de manières différentes de terminer la partie, sachant que l'on est obligé de « fournir » à la couleur ?



Comme chaque joueur a le même nombre de cartes dans chaque couleur, il y aura nécessairement deux plis à trèfle, un à carreau, deux à cœur et trois à pique. Considérons le joueur « Sud ». Il doit jouer 8 cartes : il a donc $8!$ manières différentes de les jouer. Pour un ordre donné des cartes de « Sud », considérons les possibilités

Exercices ordinaires de probabilités

offertes aux trois autres joueurs : chacun a deux possibilités pour jouer les trèfles, une pour les carreaux, deux pour les cœurs et 3! pour les piques. Ils ont ainsi $2^3 \times 2^3 \times 6^3 = 13\,824$ possibilités de jouer. Il y a donc $8! \times 2^3 \times 2^3 \times 6^3 = 55\,738\,680$ manières différentes de jouer.

7 □

Une secrétaire dispose d'une pochette de timbres contenant cinq timbres à 0,20€ de couleurs différentes, quatre timbres à 0,10€ différents, deux timbres à 1€, un rouge et un bleu, et un timbre à 2€. Elle doit affranchir une lettre à 2,40€.

Calculer le nombre de combinaisons différentes de timbres-poste permettant d'affranchir la lettre.



Tous les timbres sont différents, les combinaisons que l'on peut faire avec ces timbres sont donc toutes différentes. Établissons la liste des combinaisons de valeurs dont la somme fait 2,40€ associées au nombre de combinaisons de timbres correspondantes :

valeurs	combinaisons
un à 2€ avec deux à 0,20€	$\binom{5}{2}$
un à 2€ avec un à 0,20€ et deux à 0,10€	$5 \times \binom{4}{2}$
un à 2€ avec quatre à 0,10€	1
deux à 1€ avec deux à 0,20€	$\binom{5}{2}$
deux à 1€ avec un à 0,20€ et deux à 0,10€	$5 \times \binom{4}{2}$
deux à 1€ avec quatre à 0,10€	1
un à 1€ avec cinq à 0,20€ et quatre à 0,10€	2
total	84

Il y a 84 combinaisons différentes.