PC
Mathématiques · Informatique
2020

Sous la coordination de

William Aufort
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Lyon)

Florian Metzger
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Vincent Puyhaubert
professeur en CPGE
ancien élève de l'École Normale Supérieure (Paris-Saclay)

Par

Jean-Paul Bonnet
professeur en CPGE

Philippe Bouafia
professeur agrégé en école d'ingénieurs

Céline Chevalier
enseignant-chercheur à l'université

Julien Dumont
professeur en CPGE

Julie Gauthier
professeur agrégé

Quentin Guilmant
ENS Lyon

Benjamin Monmege
enseignant-chercheur à l'université

Matthias Moreno Ray
professeur en CPGE

Sommaire thématique de mathématiques

2015 – 2020

	Structures algébriques et arithmétique	Polynômes	Algèbre linéaire générale	Réduction des endomorphismes	Produit scalaire et espaces euclidiens	Topologie des espaces vectoriels normés	Suites et séries numériques	Suites et séries de fonctions	Séries entières	Analyse réelle	Intégration	Équations différentielles	Fonctions de plusieurs variables	Dénombrement et probabilités	Informatique pour tous
e3a MP Maths 1															
e3a PC Maths 1															
e3a PSI Maths 1		•	••	••		•	•				••			•••	
CCINP MP Maths 1		•	•		•		••	••••••	••••	•••	•••••		•	••••	•
CCINP MP Maths 2	•••	•••	••••	••••••	•••••	•					•	•		•	•••
CCINP PC Maths		•••	•••	••	••	••		•	•••		•••••	•	•	•••••	
CCINP PSI Maths			••••	•••••	•	•	••	•	•••	•••	•••	••••		••	
Centrale MP Maths 1	•	••	•••	••••	•	•	•	•		•	•	•		•	
Centrale MP Maths 2			•	•	•	•	•••	•••	•••	•	•••••	••	••	•••	
Centrale PC Maths 1	•	••	••••	••••	••				•••		••	•	•	•••	
Centrale PC Maths 2	•	••	•				••	••••	••	••	•••			••••	
Centrale PSI Maths 1		••	•••	•••		••	•••	••	•	••		•	•	•••••	•
Centrale PSI Maths 2		••	•••	•			•	•	••	•••	••••	•	•	••••	
Mines MP Maths 1	•		•••	•••	••	•	••	•	••	•	•	••		••••	
Mines MP Maths 2		•••	••	•	••	••	•••	••	•	•	•••	•	•	••	
Mines PC Maths 1		•	•••	•			•••	•	••	•••		•		•••••	
Mines PC Maths 2		•	•		•		••	•	••	••	••••	••	•	•	
Mines PSI Maths 1			•••	•			••	•	••	•••		•		•••••	
Mines PSI Maths 2		••	••••	••	•	•	•			••	••			•	
X/ENS MP Maths A	••	••••	•••••	••••	••	•••	•		••	•					
X/ENS MP Maths B		•			•	•	••	••	•	•••••	•••••	•	•	••	
X/ENS PC Maths		•	•••	•••	••	•				•••	••		•	•••	
X/ENS PSI Maths		•••	••••	•	••	••	•			•••		•	•		

Sommaire

Mines-Ponts

Polytechnique-ENS

Formulaires

SESSION 2020 **PC1M**

CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Lundi 4 mai : 8 h - 12 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1
Calcul de l'intégrale de Dirichlet

L'objectif de cet exercice est de démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$$

et de calculer sa valeur. On considère la fonction $f : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad f(x,t) = \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}.$$

On définit également la fonction $u : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x,t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad u(x,t) = -\frac{x\sin(t) + \cos(t)}{1+x^2} e^{-xt}.$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans la démontrer** l'inégalité $|\sin(t)| \leqslant |t|$ valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Partie I - Préliminaires

Q1. Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Q2. En utilisant par exemple une intégration par parties, montrer que l'intégrale I est convergente si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2} \mathrm{d}t$$

est convergente. En déduire que l'intégrale I converge.

Q3. Soit $x \geqslant 0$. Montrer que $t \mapsto u(x,t)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t)e^{-xt}$ sur $]0, +\infty[$.

Dans la suite de l'exercice, on définit la fonction $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t) \mathrm{d}t.$$

Partie II - Calcul de F sur $]0, +\infty[$

Q4. Montrer que $|F(x)| \leqslant \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

Q5. Soit $a > 0$. Montrer que la fonction F est dérivable sur $[a, +\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-xt} \mathrm{d}t.$$

Q6. En déduire que la fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. Conclure que :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(x).$$

Partie III - Conclusion

On considère les fonctions $F_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $F_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in [0,1], \quad F_1(x) = \int_0^1 f(x,t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad F_2(x) = \int_1^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t.$$

Q7. Montrer que la fonction F_1 est continue sur $[0,1]$.

Q8. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et que :

$$F_2(x) = \frac{x\sin(1) + \cos(1)}{1+x^2}e^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}\mathrm{d}t.$$

Q9. Montrer que la fonction F_2 est continue sur $[0,1]$.

Q10. En déduire que la fonction F est continue en 0, puis déterminer la valeur de l'intégrale I.

CCINP Maths PC 2020 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Céline Chevalier (enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Philippe Bouafia (professeur agrégé en école d'ingénieurs) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

Ce sujet de mathématiques couvre trois parties du programme (analyse, algèbre linéaire et probabilités) dans trois exercices indépendants de difficultés comparables.

- L'objectif du premier exercice est le calcul de l'intégrale de Dirichlet
$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$
en exploitant en particulier la fonction F définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par
$$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$
C'est un thème classique qui permet de bien revoir toutes les notions d'intégrabilité et d'intégrales à paramètre.
- Dans le deuxième exercice, on se place sur la boule unité fermée B_n de $\mathbb{R}^n$ et on étudie les extremums de la fonction $f : \mathrm{B}_n \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall (x_1,\ldots,x_n) \in \mathrm{B}_n \qquad f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j}x_ix_j$$
où les réels $a_{i,j}$ sont fixés pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$.
La première partie étudie un exemple simple pour $n = 2$ et la deuxième traite le cas général en diagonalisant la matrice M_f associée à f. Les résultats nécessaires sur l'écriture matricielle d'une forme quadratique et la diagonalisabilité d'une matrice symétrique réelle sont rappelés. Enfin, la troisième partie applique les résultats de la deuxième à un exemple.
- Le troisième exercice, consacré aux probabilités et surtout aux séries entières, étudie une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$. À l'origine, un pion se trouve en 0. À chaque étape, sa position x peut évoluer en $x+1$ ou $x-1$, avec probabilité $1/2$. L'objectif de l'exercice est de déterminer la loi de la variable aléatoire T mesurant le temps de retour à l'origine du pion, c'est-à-dire le plus petit entier n (s'il existe) tel qu'à l'étape n, la position du pion vaut $x = 0$. La première partie commence par étudier la variable aléatoire S_n mesurant la position du pion à l'instant n. La deuxième partie a pour objectif de calculer la fonction génératrice de la suite $p_n = (\mathrm{P}(\mathrm{S}_n = 0))_{n\geqslant 0}$. Enfin, la troisième partie permet de déterminer la loi de la variable T.

Les exercices de ce sujet sont bien construits. D'une longueur et d'une difficulté tout à fait raisonnables, ils abordent des thèmes variés et constituent de bons outils de révision.

Indications

Exercice 1

1 Utiliser l'inégalité $|\sin(t)| \leqslant |t|$ valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2 Dans l'intégration par parties pour l'intégrale I, considérer $t \mapsto 1-\cos(t)$ comme primitive de $t \mapsto \sin(t)$.

3 Vérifier que la dérivée de $t \mapsto u(x,t)$ est bien égale à $t \mapsto \sin(t)\mathrm{e}^{-xt}$.

4 Pour $x > 0$, intégrer l'inégalité

$$\forall t \in \left]\,0\,;+\infty\,\right[\qquad |f(x,t)| \leqslant \mathrm{e}^{-xt}$$

5 Utiliser le théorème de dérivation des intégrales à paramètre.

6 Combiner les questions 5 et 3 pour déterminer F', puis la question 4 pour calculer la constante d'intégration.

7 Exploiter le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

8 Étudier l'intégrabilité en l'infini en majorant brutalement la fonction. Effectuer ensuite une intégration par parties en dérivant $t \mapsto 1/t$ et en utilisant la primitive de $t \mapsto \sin(t)\mathrm{e}^{-xt}$ déterminée à la question 3.

9 Appliquer à nouveau le théorème de continuité des intégrales à paramètre.

10 La continuité découle des questions 7 et 9. En déduire que $\mathrm{I} = \lim\limits_{x\to 0} \mathrm{F}(x)$, puis conclure à l'aide de la question 6.

Exercice 2

12 Utiliser le paramétrage

$$\mathrm{S}_2 = \{(\cos(t), \sin(t)) \mid t \in [\,0\,;2\pi\,[\,\}$$

et étudier les variations de la fonction indiquée dans l'énoncé.

13 Les points critiques de f vérifient

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

14 La question 13 donne le seul point en lequel f peut atteindre un extremum sur B_2' et la question 12 donne les extremums de f sur S_2.

15 Calculer le polynôme caractéristique de M_f.

16 Exprimer d'abord $(\mathrm{M}_f\mathrm{X})_i$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, puis

$$\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}_f\mathrm{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i(\mathrm{M}_f\mathrm{X})_i$$

Séparer les termes d'indices plus petits et plus grands que i dans les sommes.

18 Comme P est orthogonale, $\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}^{\mathrm{T}}$.

19 Utiliser l'encadrement $\lambda_1 \leqslant \lambda_i \leqslant \lambda_n$, valable pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. La majoration de la partie droite découle de la question 18. Pour la partie gauche, se souvenir que $\lambda_1 < 0$. Prouver enfin l'égalité $\mathrm{Y}^{\mathrm{T}}\mathrm{D}\mathrm{Y} = f(x)$ à l'aide de la question 16.

20 Considérer des vecteurs propres unitaires associés aux valeurs propres λ_1 et λ_n.

21 La preuve de la question 19 s'applique en grande partie. Le minorant devient 0, atteint en 0.

22 En utilisant le théorème du rang, puis le résultat sur la somme des valeurs propres d'une matrice, les deux valeurs propres de M_f sont $-n+2$ et 2. On se retrouve dans le cadre de la question 20, qui s'applique directement.

Exercice 3

25 Il n'existe aucune somme d'un nombre impair de fois 1 et -1 égale à 0.

26 Montrer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, que $\mathrm{P}(\mathrm{Y}_k = 0) = \mathrm{P}(\mathrm{Y}_k = 1) = 1/2$.

27 Une somme de n lois de Bernoulli indépendantes de paramètre $1/2$ est une loi binomiale de paramètres n et $1/2$.

29 Procéder par majoration en se rappelant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel p_n est une probabilité, donc $p_n \leqslant 1$.

30 Partir du résultat donné en mettant tout sur même dénominateur puis en multipliant haut et bas par $2 \times 4 \times \cdots \times 2m$.

31 Commencer par rappeler le développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

33 La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n$ converge normalement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \max\limits_{x\in[\,-1\,;\,1\,]} |g_n(x)|$ converge.

35 Exploiter les questions 31 et 34.

37 Utiliser les questions 33 et 35 puis, pour l'interprétation, revenir à la définition de l'événement $(\mathrm{T} = +\infty)$.

38 La variable T admet une espérance si, et seulement si, sa fonction génératrice (ici g) est bien définie et dérivable en 1. Appliquer alors les questions 33 et 35, puis calculer le taux d'accroissement à gauche de g en 1.

Exercice 1. Calcul de l'intégrale de Dirichlet

I. Préliminaires

1 Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|\sin(t)| \leqslant |t|$ d'après l'indication de l'énoncé, donc

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad |f(x,t)| \leqslant \mathrm{e}^{-xt}$$

Comme $x > 0$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ donc, par comparaison,

$$\boxed{\text{Pour tout } x > 0, \text{ la fonction } t \mapsto f(x,t) \text{ est intégrable sur }]\,0\,;+\infty\,[.}$$

2 Effectuons une intégration par parties sur l'intégrale I en posant $u : t \mapsto 1/t$ et $v' : t \mapsto \sin(t)$. On a alors $u' : t \mapsto -1/t^2$ et l'on peut prendre $v : t \mapsto 1 - \cos(t)$. Les fonctions u et v sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

> On pense spontanément à $v : t \mapsto -\cos(t)$ mais après un premier calcul, on se rend compte que cette fonction ne convient pas pour obtenir l'expression donnée dans l'énoncé. On peut alors considérer à la place la fonction $v : t \mapsto 1 - \cos(t)$ puisque sa dérivée est la même.
>
> Pour éviter ce souci, on aurait pu partir de l'intégrale donnée dans l'énoncé et se ramener à I, également par intégration par parties. On aurait alors posé $u : t \mapsto 1 - \cos(t)$ et $v' : t \mapsto 1/t^2$. Cela donne $u' : t \mapsto \sin(t)$ et l'on peut prendre $v : t \mapsto -1/t$. Les fonctions u et v sont bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et les calculs sont similaires.

Notons que la fonction $t \mapsto u(t)v(t)$ admet des limites en 0 et $+\infty$. En effet, puisque, pour tout $t > 0$,

$$\left|\frac{1-\cos(t)}{t}\right| \leqslant \frac{1+|\cos(t)|}{t} \leqslant \frac{2}{t}$$

on a
$$\frac{1-\cos(t)}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

En outre, pour tout $t > 0$,

$$\frac{\cos(t)-1}{t} = \frac{\cos(t)-\cos(0)}{t-0} \xrightarrow[t\to 0]{} \cos'(0) = \sin(0) = 0$$

On en déduit que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} uv'$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'v$ ont même nature, d'où

$$\boxed{\text{L'intégrale I est convergente si, et seulement si, l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ est convergente.}}$$

Enfin,
$$\forall t \in \,]\,0\,;+\infty\,[\qquad \left|\frac{1-\cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{2}{t^2}$$

qui est intégrable en l'infini d'après le critère de Riemann, et

$$\frac{1-\cos(t)}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{2}$$

qui est intégrable en 0. Par suite, l'intégrale donnée dans l'énoncé converge, donc

$$\boxed{\text{L'intégrale I est convergente.}}$$

Centrale Maths 1 PC 2020 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jean-Paul Bonnet (professeur en CPGE) ; il a été relu par Bertrand Wiel (professeur en CPGE) et Gilbert Monna (professeur en CPGE).

Ce sujet porte sur l'ensemble $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ des matrices symplectiques dont la définition est donnée dans l'énoncé. Il étudie les matrices de $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ qui sont orthogonales puis propose la démonstration de théorèmes de réduction sur les matrices symplectiques, d'abord symétriques puis antisymétriques. Le sujet est composé de cinq parties de longueurs et difficultés inégales, qui ne sont pas indépendantes.

- Dans la partie I, on établit une propriété générale de la matrice
$$\mathrm{J}_n = \begin{pmatrix} 0_{n,n} & \mathrm{I}_n \\ -\mathrm{I}_n & 0_{n,n} \end{pmatrix}$$
qui sera largement exploitée tout au long du sujet, avant de se concentrer sur la dimension 2.
- La deuxième partie s'intéresse à une caractérisation des matrices appartenant à l'intersection $\mathrm{O}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$.
- La partie III est très courte. On y démontre des résultats généraux sur les matrices symplectiques.
- La partie suivante prouve le théorème général concernant la réduction des matrices de $\mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ sur un modèle proche de la preuve du théorème spectral. On l'applique ensuite sur un exemple.
- La dernière partie concerne un autre théorème de réduction, cette fois sur les matrices de $\mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$ (théorème de Cartan). La démarche de la partie IV est utilisée. Enfin, on applique le théorème sur un exemple.

Ce problème couvre largement la partie algèbre du programme en se concentrant sur les espaces euclidiens. Il s'agit d'une épreuve technique qui requiert de la méthode. Il faut maitriser les questions d'orthogonalité pour la mener à bien. En outre, certaines questions demandent beaucoup d'autonomie et des prises d'initiative. C'est un excellent sujet de révision.

Indications

Partie I

1 Penser à un calcul par blocs pour J_n^2.

4 Utiliser la question 3 et montrer simplement que la matrice est orthogonale.

5 Penser au théorème spectral et utiliser la question 4.

Partie II

9 Effectuer le produit par blocs.

13 Identifier les coefficients des deux membres de $P^T J_n P = J_n$.

14 Utiliser les questions 12 et 13 et le fait que $(X_1, \ldots, X_{2n})$ est une base orthogonale.

15 Utiliser les questions 12 et 14. Régler la question du signe avec la question 13.

Partie III

17 Penser à établir que $\left(M^{-1}\right)^T = \left(M^T\right)^{-1}$.

Partie IV

20 Montrer que l'application $X \mapsto J_n X$ réalise un isomorphisme entre E_λ et $E_{1/\lambda}$.

22 Remarquer que $X \in E_1 \backslash \{0\} \implies J_n X \in E_1$ et construire récursivement une base.

24 Partir de la décomposition en somme directe orthogonale due au théorème spectral et exploiter les questions précédentes.

26 Considérer la somme des colonnes pour démarrer ou jeter un coup d'oeil à la question 35.

Partie V

27 Montrer tout d'abord que 0 est la seule valeur propre réelle possible puis utiliser la question 16.

28 Utiliser la question 19.

34 Établir un résultat similaire à celui de la question 32 pour -1, en distinguant si $J_n X$ appartient à $\text{Vect}\,(X, MX)$ ou non.

I. Cas des matrices de taille 2×2

1 Par un simple produit matriciel par blocs,

$$\begin{aligned} {\mathrm{J}_n}^2 &= \begin{pmatrix} 0_{n,n} & \mathrm{I}_n \\ -\mathrm{I}_n & 0_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{n,n} & \mathrm{I}_n \\ -\mathrm{I}_n & 0_{n,n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} {0_{n,n}}^2 - {\mathrm{I}_n}^2 & 0_{n,n} \times \mathrm{I}_n + \mathrm{I}_n \times 0_{n,n} \\ -\mathrm{I}_n \times 0_{n,n} - 0_{n,n} \times \mathrm{I}_n & -{\mathrm{I}_n}^2 + {0_{n,n}}^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où
$$ {\mathrm{J}_n}^2 = \begin{pmatrix} -\mathrm{I}_n & 0_{n,n} \\ 0_{n,n} & -\mathrm{I}_n \end{pmatrix}$$

Ainsi,
$$\boxed{\mathrm{J}_n^2 = -\mathrm{I}_{2n}}$$

Pour la seconde partie de la question, on calcule encore par blocs. D'une part,

$$\begin{aligned} \mathrm{J}_n^{\mathrm{T}} &= \begin{pmatrix} 0_{n,n} & \mathrm{I}_n \\ -\mathrm{I}_n & 0_{n,n} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \\ &= \begin{pmatrix} {0_{n,n}}^{\mathrm{T}} & (-\mathrm{I}_n)^{\mathrm{T}} \\ {\mathrm{I}_n}^{\mathrm{T}} & 0_{n,n}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0_{n,n} & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0_{n,n} \end{pmatrix} \\ \mathrm{J}_n^{\mathrm{T}} &= -\mathrm{J}_n \end{aligned}$$

d'où $\mathrm{J}_n \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$. D'autre part,

$$\mathrm{J}_n^{\mathrm{T}} \mathrm{J}_n \mathrm{J}_n = -\mathrm{J}_n \mathrm{J}_n^2 = +\mathrm{J}_n \mathrm{I}_{2n} = \mathrm{J}_n$$

ainsi $\mathrm{J}_n \in \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$. En conclusion,

$$\boxed{\mathrm{J}_n \in \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})}$$

> Il est important de noter que
> $$ {\mathrm{J}_n}^{\mathrm{T}} \mathrm{J}_n = -{\mathrm{J}_n}^2 = \mathrm{I}_{2n}$$
> donc J_n est une matrice orthogonale. Il s'agit d'un point important qui facilitera beaucoup de calculs par la suite. En particulier, J_n est inversible.

2 On pose une matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$$

Dès lors,
$$\begin{aligned} \mathrm{A}^{\mathrm{T}} \mathrm{J}_1 \mathrm{A} &= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -c & a \\ -d & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & ad - bc \\ -(ad - bc) & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où
$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}} \mathrm{J}_1 \mathrm{A} = \det(\mathrm{A}) \mathrm{J}_1$$

Il en découle que
$$\boxed{\mathrm{A} \in \mathrm{Sp}_2(\mathbb{R}) \iff \det \mathrm{A} = 1}$$

3 Si M est symplectique, d'après la question 2,

$$\det \mathrm{M} = 1$$

d'où M est une matrice de rotation de $\mathbb{R}^2$. D'après le cours, on a

$$y_1 = -x_2 \text{ et } y_2 = x_1$$

c'est-à-dire
$$\mathrm{M}_2 = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = -\mathrm{J}_1\mathrm{M}_1$$

Réciproquement, si $\mathrm{M}_2 = -\mathrm{J}_1\mathrm{M}_1$ alors

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

et
$$\det \mathrm{M} = {x_1}^2 + {x_2}^2 = 1 \qquad \text{(M orthogonale)}$$

Par suite, M est symplectique d'après la question 2. En conclusion,

$$\boxed{\forall \mathrm{M} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \quad \mathrm{M} \in \mathrm{Sp}_2(\mathbb{R}) \iff \mathrm{M}_2 = -\mathrm{J}_1\mathrm{M}_1}$$

4 Posons $\mathrm{P} = (\mathrm{X}_1 \,|{-\mathrm{J}_1\mathrm{X}_1}\,)$; comme les colonnes de P vérifient la condition de la question 3, si elle est orthogonale alors elle est symplectique. Prouvons donc qu'il s'agit d'une matrice orthogonale. Nous savons que

$$-\mathrm{J}_1 = {\mathrm{J}_1}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice orthogonale et d'après le cours, il s'agit d'une matrice de rotation d'angle $\pi/2$, donc,

$$\mathrm{X}_1 \perp -\mathrm{J}_1\mathrm{X}_1$$

Comme X_1 est de norme 1, $-\mathrm{J}_1\mathrm{X}_1$ l'est également. Par suite, il s'agit d'une matrice orthogonale qui vérifie la condition de la question 3.

$$\boxed{\text{La matrice P est orthogonale et symplectique.}}$$

5 D'une part, la matrice M est symétrique réelle donc, d'après le théorème spectral, elle est diagonalisable et il existe (λ_1, λ_2) dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathrm{P}' \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ tels que

$$\mathrm{P}'^{\mathrm{T}}\mathrm{M}\mathrm{P}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

D'autre part, M est symplectique donc, d'après la question 2, son déterminant vaut 1. Par suite,

$$1 = \det \mathrm{M} = \lambda_1\lambda_2$$

et
$$\boxed{\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}}$$

Si $\det \mathrm{P}' = 1$, alors la matrice de changement de base P' est orthogonale et symplectique. On pose alors $\mathrm{P} = \mathrm{P}'$ et la réponse est complète. Sinon, en notant X_1 la première colonne de P' qui est donc de norme 1, il vient, d'après la question 4, que la matrice

$$\mathrm{P} = (\mathrm{X}_1 \,|{-\mathrm{J}_1\mathrm{X}_1}\,)$$

est orthogonale et symplectique. Ainsi, $-\mathrm{J}_1\mathrm{X}_1 \perp \mathrm{X}_1$ d'où

$${\mathrm{X}_1}^{\perp} = \mathrm{Vect}\,(-\mathrm{J}_1\mathrm{X}_1)$$

Centrale Maths 2 PC 2020 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Julie Gauthier (professeur agrégé) ; il a été relu par Angèle Niclas (ENS Lyon) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Dans ce sujet d'analyse et de probabilités, on s'intéresse à la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle X. Cette fonction est définie par l'espérance de $t \mapsto \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\, t\mathrm{X}}$. On démontre de deux manières qu'elle caractérise la variable aléatoire, c'est-à-dire que la connaissance de cette fonction permet de retrouver la loi de X. Dans un second temps, on s'intéresse à sa régularité et à son développement en série entière.

- Dans la partie I, on définit la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle. Puis on donne une condition nécessaire et suffisante pour que cette fonction soit paire. On traite alors trois exemples avec des variables aléatoires concrètes. Pour finir, on s'intéresse au lien entre l'ensemble image de la variable aléatoire réelle et celui de sa fonction caractéristique.
- Dans la partie II, on met en œuvre deux méthodes faisant intervenir des passages à la limite avec des interversions limite-intégrale et limite-série pour retrouver la loi d'une variable aléatoire réelle à partir de sa fonction caractéristique. La fonction sinus cardinal et son intégrale convergente sur $\mathbb{R}_+$ jouent un rôle central dans ces méthodes.
- Dans la partie III, on fait le lien entre la régularité de la fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle et l'existence des moments de cette dernière. Là encore, les théorèmes d'interversion pour les séries de fonctions entrent en jeu.
- Pour finir, l'objet de la partie IV est de développer la fonction caractéristique en série entière. On traite d'abord le cas où l'univers est fini avant de traiter celui où il est dénombrable (donc infini). Pour ce faire, des interversions de sommes sont requises.

Dans ce sujet, les variables aléatoires jouent en fait un rôle mineur pour laisser la place aux séries de fonctions, aux intégrales à paramètre et aux passages à la limite sous les signes somme et intégrale. Puisqu'il fait intervenir la plupart des théorèmes d'interversion, le sujet demande beaucoup de rigueur dans la rédaction. En particulier, de multiples disjonctions de cas sont nécessaires. Les calculs sont nombreux et demandent des justifications précises.

Indications

Partie I

3 Utiliser les formules explicites trouvées aux deux questions précédentes tout en gardant en tête le sens des a_n pour appliquer le théorème de continuité d'une série de fonctions dans le cas où $\mathrm{X}(\Omega)$ est dénombrable.

4 Appliquer les résultats des questions 1 et 2 à la variable aléatoire Y. Faire apparaître $\phi_{\mathrm{X}}(at)$.

5 Noter que $\phi_{-\mathrm{X}} = \overline{\phi_{\mathrm{X}}}$.

6 Utiliser la formule de la question 1 et la formule du binôme de Newton.

7 Utiliser la formule de la question 2. Faire apparaître une série géométrique.

8 Utiliser la formule de la question 2. Penser au développement en série entière de la fonction exponentielle.

9 Utiliser la formule explicite obtenue aux questions 1 et 2 et l'inégalité triangulaire. Quantifier la somme $\sum a_n$.

10 Utiliser la formule explicite obtenue aux questions 1 et 2. Calculer la valeur de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\, t_0 x}$ pour tout $x \in \mathrm{X}(\Omega)$. Elle ne dépend pas de x.

11 Écrire $\phi_{\mathrm{X}}(t_0)$ sous forme polaire. En déduire l'existence de a.

12 Prendre la partie réelle de l'égalité prouvée à la question 11.

13 Étudier les signes de $1 - \cos(t_0 x_n - t_0 a)$ et des a_n puis conclure.

14 Utiliser le résultat de la question 13.

Partie II

15 Penser à justifier l'existence de $\mathrm{V}_m(\mathrm{T})$ avant de permuter l'intégrale non généralisée et la somme finie. Utiliser la formule d'Euler pour obtenir le sinus cardinal. Utiliser la continuité de la fonction sinus cardinal en 0 pour traiter l'éventuel terme où $x_n - m = 0$.

16 Montrer que $\operatorname{sinc}(u)$ tend vers 0 lorsque u tend vers $\pm\infty$. Cela permet de traiter tous les termes de la somme obtenue à la question précédente sauf éventuellement celui où $x_n - m = 0$. Disjoindre les cas afin de trouver la valeur de ce terme puis conclure.

17 Effectuer les même calculs qu'à la question 15 en justifiant soigneusement la permutation série-intégrale sur un segment.

18 Appliquer le théorème de prolongement par continuité. Penser à traiter à part le cas où $x_n = m$.

19 Appliquer le théorème de continuité pour une série de fonctions continues.

20 Utiliser la fonction G définie à la question précédente. Se ramener à une limite en 0.

21 Définir V_m pour X et pour Y. Montrer que ces deux fonctions sont égales. En déduire qu'elles ont la même limite en $+\infty$ puis conclure.

23 Appliquer le théorème de dérivation pour une intégrale à paramètre.

24 Utiliser le théorème fondamental de l'analyse et la formule démontrée à la question précédente.

25 Couper en deux intégrales en $\pi/2$ pour traiter le problème en $+\infty$ indépendamment de 0. Intégrer par parties et appliquer le critère de Riemann.

26 Penser à disjoindre les cas en fonction des signes de a et b. Utiliser la formule de la question 24 et le résultat de la question 25. La parité de sinc joue un rôle dans la preuve lorsque a ou b sont négatifs.

27 Réécrire la quantité dont on veut calculer la limite sous la forme d'une somme de termes de la forme $\displaystyle\int_{-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} \mathrm{K}_{\alpha,\beta}(t)\,\mathrm{d}t$ où α et β sont à déterminer. Le résultat de la question 26 permet alors de calculer la limite de chacun de ces termes.

Partie III

29 Après avoir écrit ϕ_{X} sous forme d'une série de fonctions en utilisant le résultat de la question 2, lui appliquer le théorème de dérivations terme à terme.

31 Écrire le développement limité de ϕ_{X} à l'ordre 2.

32 Utiliser la formule de la question 2.

33 Voir f comme la série de fonctions donnée à la question 32. L'écrire à l'aide de sinc. Majorer la somme partielle pour $h > 0$ puis passer à la limite lorsque h tend vers 0. En déduire que la série de fonctions évaluée en 0 converge et conclure.

34 Noter que tous les termes sont positifs dans la série obtenue pour le calcul de l'espérance de X^{2k}.

35 Vérifier d'abord que Y est bien une variable aléatoire réelle discrète. Trouver une expression de ϕ_{Y} en fonction de ${\phi_{\mathrm{X}}}^{(2k)}$ en utilisant le résultat de la question 19.

36 Appliquer ce qui a été prouvé à la question 33 à Y. Puis, revenir à la définition du moment pour conclure.

37 Il s'agit ici de rédiger correctement la récurrence en utilisant les résultats des questions précédentes.

Partie IV

38 Utiliser la formule de la question 1 pour ϕ_{X} puis développer chacun des termes en série entière. Utiliser le théorème du transfert pour conclure.

39 Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral sur une fonction à valeurs complexes.

40 Il faut utiliser les hypothèses de cette partie IV.B qui n'ont pas encore servi. Partir de la valeur absolue de la différence entre $\phi_{\mathrm{X}}(t)$ et la somme partielle de la série entière souhaitée. Permuter somme finie et série pour faire apparaître le membre de gauche de l'inégalité de la question précédente. Conclure en utilisant notamment la formule de Stirling.

I. Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

1 Soit $t \in \mathbb{R}$. Définissons la fonction

$$f_t : \begin{cases} \mathrm{X}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C} \\ \quad x \quad \longmapsto \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,tx} \end{cases}$$

- L'ensemble $\mathrm{X}(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ avec les x_i deux à deux distincts est fini ;
- l'application f_t est définie sur $\mathrm{X}(\Omega)$ et à valeurs complexes.

Alors, d'après le théorème du transfert (cas $\mathrm{X}(\Omega)$ fini) donné dans l'énoncé, $f_t(\mathrm{X})$ est d'espérance finie et

$$\mathrm{E}\left(f_t(\mathrm{X})\right) = \sum_{k=1}^{r} \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_k) f_t(x_k)$$

Autrement dit, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le complexe $\phi_{\mathrm{X}}(t)$ est bien défini et vérifie

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad \phi_{\mathrm{X}}(t) = \sum_{k=1}^{r} a_k \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,tx_k}}$$

2 Soit $t \in \mathbb{R}$. Définissons f_t sur $\mathrm{X}(\Omega)$ comme dans la question 1.

- L'ensemble $\mathrm{X}(\Omega) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ avec les x_n deux à deux distincts est dénombrable ;
- l'application f_t est définie sur $\mathrm{X}(\Omega)$ et à valeurs complexes.

Par conséquent, d'après le théorème du transfert (cas $\mathrm{X}(\Omega)$ dénombrable) donné dans l'énoncé, $f_t(\mathrm{X})$ est d'espérance finie si, et seulement si, la série

$$\mathrm{S} = \sum_{n \geqslant 0} \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_n) f_t(x_n)$$

converge absolument. Dans ce cas,

$$\mathrm{E}(f_t(\mathrm{X})) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_n) f_t(x_n)$$

Étudions la convergence absolue de la série S. Son terme général vaut $a_n \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,tx_n}$ par définition des a_n et de f_t. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il vient

$$\left|a_n \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,tx_n}\right| = a_n \qquad \text{car} \qquad a_n = \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_n) \geqslant 0$$

Or $\sum a_n$ converge et vaut 1 car X est une variable aléatoire réelle. Ceci prouve que $\sum |\mathrm{P}(\mathrm{X} = x_n) f_t(x_n)|$ converge c'est-à-dire que la série $\sum \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_n) f_t(x_n)$ converge absolument. Ainsi, $f_t(\mathrm{X})$ admet une espérance et celle-ci vaut

$$\mathrm{E}(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,t\mathrm{X}}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_n) f_t(x_n)$$

Autrement dit $$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad \phi_{\mathrm{X}}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,tx_n}}$$

Centrale Informatique MP-PC-PSI 2020 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Julien Dumont (professeur en CPGE) et Jean-Julien Fleck (professeur en CPGE).

Ce sujet étudie la génération de photomosaïques, qui sont des images composées d'autres images plus petites, à la manière d'une mosaïque. Une image source de grande taille est décomposée en petits pavés qui sont remplacés par des vignettes issues d'une banque d'images dont les caractéristiques ressemblent à celles des pavés sources.

- Dans la partie I, le sujet étudie des images constituées de pixels représentés par leurs niveaux de rouge, de vert et de bleu. La partie se termine par une fonction de conversion d'une image colorée en niveaux de gris. Le sujet ne traitera ensuite que des images en niveaux de gris, plus simples à transformer.
- Pour réaliser une mosaïque, il faut redimensionner des images, que ce soit l'image source ou les vignettes de la banque. C'est l'objectif de la partie II. Deux algorithmes y sont étudiés, à base d'interpolation (dans le cas d'une réduction ou d'une augmentation de la taille de l'image) puis de moyenne locale (uniquement pour la réduction). L'énoncé fournit plusieurs implémentations du second algorithme et demande de les comparer.
- La partie III traite du stockage de la banque d'images dans une base de données. Il faut écrire des requêtes pour extraire certaines photographies de la banque, en se fondant sur leur auteur, leur contenu et les mots-clés qui les caractérisent. Deux questions plus ouvertes demandent d'imaginer comment modifier la base de données pour permettre l'internationalisation de ces mots-clés.
- La dernière partie concerne le cœur de la génération de photomosaïques, à savoir le placement des vignettes sur l'image source. La comparaison d'une vignette et du pavé correspondant de l'image source est réalisée à l'aide d'une norme 1. À nouveau, la partie se termine sur deux questions plus ouvertes et délicates, demandant d'améliorer l'algorithme proposé dans l'énoncé.

Outre le thème original et amusant de ce sujet, les différentes parties du programme sont utilisées dans le sujet : représentation des nombres en mémoire, algorithmique des listes, programmation Python (en particulier avec la bibliothèque NumPy) et bases de données (bien que le sujet utilise des opérateurs SQL à la limite du programme qui rend donc la partie III difficile). Le sujet est entièrement réalisable à la fin de la première année, puisqu'il n'utilise ni récursivité ni tri de tableaux (sauf éventuellement dans les deux dernières questions plus ouvertes). Cela en fait donc un excellent sujet de révision, permettant de plus d'aboutir à un code utilisable pour réaliser vos propres photomosaïques !

Indications

Partie I

2 Lire le reste de la page 2 de l'énoncé pour trouver de l'inspiration sur la commande à utiliser.

4 Ne pas hésiter à utiliser les fonctions NumPy rappelées en fin d'énoncé.

6 Pour parcourir les pixels d'une image, on utilise deux boucles `for` imbriquées.

Partie II

8 Il faut utiliser l'opération de division entière pour prendre la partie entière des indices interpolés.

10 Commencer par exhiber l'ensemble des entiers I et J que parcourent les deux boucles imbriquées. Utiliser ensuite le fait que ces ensembles sont respectivement en bijection avec $[\![\, 0\,;h-1\,]\!]$ et $[\![\, 0\,;w-1\,]\!]$.

13 Attention, une solution naïve consistant à parcourir la matrice S à remplir et calculer chaque somme indépendamment ne donne pas la complexité linéaire en N demandée. Remarquer plutôt que, dès que ℓ et c sont strictement positifs, $\mathrm{S}(\ell, c)$ peut s'obtenir à partir de $\mathrm{S}(\ell{-}1, c)$ et des coefficients $\mathrm{A}(\ell{-}1, j)$ pour $j \in [\![\, 0\,;c{-}1\,]\!]$.

14 Il faut notamment comprendre pourquoi la variable `X` en ligne 8 contient exactement le numérateur de la moyenne `np.mean(A[I:I+ph, J:J+pw])` calculée dans la fonction `moyenneLocale`.

16 Le tableau `sred` calculé en ligne 4 contient les seuls coefficients de la matrice S qu'on utilise dans `réductionSommation1`. Expliquer ensuite pourquoi les lignes 5 et 6 permettent de calculer simultanément toutes les valeurs des coefficients `X` en ligne 8 de `réductionSommation1`.

Partie III

20 Utiliser l'opérateur d'agrégation `COUNT(*)` combiné à une jointure des tables `Photo` et `Personne`.

21 L'information peut être extraite des jointures des tables `Photo`, `Decrit` et `Motcle`.

22 Une solution consiste à utiliser l'opérateur `INTERSECT` calculant l'intersection des résultats de deux requêtes.

23 L'opérateur `INTERSECT`, couplé avec l'opérateur `EXCEPT`, permet d'obtenir le résultat en combinant trois requêtes quasiment identiques.

Partie IV

26 Traiter différemment le cas où le redimensionnement est une réduction d'un facteur entier (permettant d'utiliser l'algorithme de `réductionSommation`) du cas général où la fonction `procheVoisin` est incontournable.

I. Pixels et images

1 Chaque composante RGB d'un pixel étant un entier naturel codé sur 8 bits, elle peut prendre $2^8 = 256$ valeurs différentes. Puisqu'il y a trois composantes,

Un pixel dont chaque composante RGB est codée sur 8 bits peut prendre $256^3 = 16\,777\,216$ couleurs différentes.

2 En synthèse additive, le blanc consiste à donner l'intensité maximale aux trois composantes. Sur 8 bits, l'intensité maximale est $2^8 - 1 = 255$. On obtient donc un pixel blanc à l'aide de la commande :

```
np.array([255, 255, 255], np.uint8)
```

> L'utilisation de types, tels que `np.uint8` pour les entiers non signés sur 8 bits, n'est pas officiellement au programme et peut désarçonner en première lecture. On avait donc tout intérêt, comme d'habitude, à avoir lu le sujet en entier pour trouver des indices sur la marche à suivre. On imagine cependant que la proposition `np.array([255, 255, 255])` aura été considérée avec bienveillance par les correcteurs, même si le paramètre `dtype` manquant est alors interprété par défaut comme un entier signé sur 64 bits.
>
> On peut également utiliser la fonction `full` de la bibliothèque NumPy :
>
> ```
> np.full(3, 255, np.uint8)
> ```

3

> Même si utiliser `np.uint8` peut être perturbant si on n'y est pas familier, le comportement de NumPy, et donc les réponses attendues, sont en tout point similaires avec le phénomène de dépassement de capacité qui est bien au programme. Si on essaie de coder l'entier naturel 280 en binaire, on obtient $1\,0001\,1000$: en ne conservant que les huit derniers bits, on obtient alors $0001\,1000$ qui code bien 24. Ceci revient à calculer la valeur dans l'intervalle $[\![\, 0\,;255 \,]\!]$ qui est congrue à 280 modulo 256.

En ayant posé `a = np.uint8(280)` et `b = np.uint8(240)`, alors

- `a` vaut 24, puisque 280 dépasse la limite de 255 autorisée sur 8 bits et

$$24 \equiv 280 \; [256]$$

- `b` vaut 240 ;
- `a+b` vaut 8, puisque $24 + 240 = 264$ dépasse la limite autorisée sur 8 bits et

$$8 \equiv 264 \; [256]$$

- `a-b` vaut 40, puisque $24 - 240 = -216$, qui n'est pas un entier non signé, et

$$40 \equiv -216 \; [256]$$

- `a//b`, quotient dans la division entière de 24 par 240, vaut 0 ;
- `a/b` vaut le flottant approximant le réel 0,1.

4 On réalise la moyenne des trois composantes d'un pixel à l'aide de la fonction `np.mean`, puis on arrondit ce résultat à l'entier le plus proche avec `round`, qu'on transforme ensuite en entier non signé sur 8 bits :

```
def gris(p):
    return np.uint8(round(np.mean(p)))
```

> Sans l'utilisation de `round`, la fonction `np.uint8` renvoie l'entier le plus proche par valeur inférieure, ce qui n'est pas le comportement attendu ici.

5 L'expression `source.shape` renvoie les dimensions du tableau NumPy `source`. L'image contenue dans le fichier `surfer.jpg` a donc une hauteur de 3000 pixels, une largeur de 4000 pixels et chaque pixel est représenté par 3 composantes.

> Contrairement à l'usage du langage courant où l'on a tendance à donner la largeur avant la hauteur, c'est bien le nombre de lignes qui apparaît en premier dans le tuple de dimensions en NumPy.

L'expression `source[0,0]` renvoie les informations du pixel en haut à gauche de l'image, qui est donc un pixel avec $144/255 \approx 56\,\%$ de rouge, $191/255 \approx 75\,\%$ de vert et $221/255 \approx 87\,\%$ de bleu.

> Il s'agit d'un pixel de couleur bleu ciel, comme on peut effectivement le voir en haut à gauche de l'image du surfeur en figure 1 dans le sujet original en couleur.

6 Parcourons l'image pixel par pixel à l'aide de deux boucles `for` imbriquées, pour appliquer à chaque pixel la fonction `gris` de la question 4. On stocke la nouvelle image dans un tableau NumPy qu'on a préalablement initialisé.

```
def conversion(a):
    h, w, p = a.shape
    image_gris = np.empty((h, w), np.uint8)
    for i in range(h):
        for j in range(w):
            image_gris[i, j] = gris(a[i, j])
    return image_gris
```

> On peut proposer une version bien plus efficace n'utilisant pas la fonction `gris`, mais plutôt les opérations matricielles de la bibliothèque NumPy (largement optimisées vis-à-vis des boucles `for`). En appliquant directement la fonction `np.mean` avec un second argument égal à 2 (ce qui revient à faire la moyenne le long du troisième axe du cube de données, soit sur les trois couleurs d'un pixel), on peut calculer un tableau bidimensionnel contenant les moyennes de chaque pixel. L'utilisation de la fonction `np.round` plutôt que `round` permet d'appliquer l'opération d'arrondi sur chaque élément du tableau.
>
> ```
> def conversion(a):
>     return np.uint8(np.round(np.mean(a, 2)))
> ```
>
> Un candidat qui maîtrise ce genre d'optimisations utilisant la bibliothèque NumPy a tout intérêt à l'employer pour gagner du temps dans la rédaction le jour J ; mais au moindre doute, mieux vaut assurer en utilisant les boucles `for` pour éviter de perdre des points.

Mines Maths 1 PC 2020 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Matthias Moreno Ray (professeur en CPGE) ; il a été relu par Céline Chevalier (enseignant-chercheur à l'université) et Gilbert Monna (professeur honoraire en CPGE).

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ est dit *nilpotent* lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$. Ce problème s'intéresse aux sous-espaces vectoriels $\mathcal{V}$ de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ qui ne contiennent que des endomorphismes nilpotents. On peut montrer qu'un tel espace $\mathcal{V}$ a toujours une dimension inférieure ou égale à $n\,(n-1)/2$ (ce point est admis par l'énoncé). L'objectif du problème est de déterminer les sous-espaces de ce type qui sont de dimension maximale : on montre que dans ce cas il existe une base B de E telle que tout élément de $\mathcal{V}$ est représenté dans B par une matrice triangulaire supérieure stricte (c'est-à-dire avec des zéros sur la diagonale). On dit que l'on a fait une « réduction simultanée » des endomorphismes de $\mathcal{V}$. La démonstration se fait par récurrence sur la dimension de E. Il s'agit d'un résultat relativement récent (théorème de Gerstenhaber, 1958).

- Dans la première partie, on montre quelques résultats techniques sur les endomorphismes nilpotents. Les questions de cette partie sont de bons exercices d'algèbre linéaire.
- Dans la deuxième partie, on met en place un mode de représentation des endomorphismes de rang 1 à l'aide d'une opération $\otimes$ définie à partir d'un produit scalaire. Cet outil sera utilisé dans la démonstration du théorème. Cette partie est plus abstraite que la précédente et demande de la rigueur conceptuelle.
- Dans la troisième partie, on montre deux lemmes qui sont au cœur de la démonstration du théorème : une identité sur les traces des endomorphismes de $\mathcal{V}$ et une condition suffisante pour avoir un vecteur qui annule tous les endomorphismes de $\mathcal{V}$. La difficulté de cette partie provient des notations. On y utilise une généralisation de la formule du binôme de Newton dans le cas de deux endomorphismes qui ne commutent pas.
- La quatrième partie est la plus longue et contient la démonstration du théorème, par récurrence sur la dimension de E. On montre l'existence d'un vecteur x qui annule simultanément tous les endomorphismes de $\mathcal{V}$ et on travaille ensuite avec le restriction de ces endomorphismes sur l'hyperplan $\mathrm{Vect}\,(x)^{\perp}$. Cette partie utilise tous les résultats des parties précédentes et demande encore une fois d'assimiler de nouvelles notations.

Ce problème étudie principalement des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ et des applications entre ces sous-espaces, ce qui permet de se confronter à un niveau d'abstraction élevé. Son originalité vient de ce qu'il privilégie les approches spatiale et vectorielle en limitant au maximum l'utilisation des matrices.

Si l'on admet le résultat de la première question, il peut être traité intégralement en fin de première année. Il constitue un bon entraînement sur le programme d'algèbre linéaire de PCSI.

Indications

Partie I

1 Utiliser une condition suffisante pour qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ soit trigonalisable, puis montrer que les valeurs propres d'une matrice nilpotente sont nulles.

2 Donner un isomorphisme entre $\mathcal{N}_\mathrm{B}$ et $\mathrm{T}_n^{++}(\mathbb{R})$. Écrire la matrice de u dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ et justifier que $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$.

3 Appliquer successivement $u^{p-1}, u^{p-2}, \dots, u$ à une relation linéaire entre les vecteurs de la première famille.

Pour la deuxième famille, appliquer d'abord u^q puis poser $z = u^{p-q}(x)$ et appliquer successivement $u^{q-1}, \dots, u$.

4 Montrer d'abord que $\mathrm{Im}\,(u^{p-1}) \subset \mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Ker}\,(u)$. À l'aide de la question 3, prouver ensuite que si $z \in \mathrm{Im}\,(u^{p-1}) \smallsetminus \{0\}$, alors tout vecteur de $\mathrm{Im}\,(u) \cap \mathrm{Ker}\,(u)$ est colinéaire à z.

Partie II

5 Utiliser la formule $\dim(\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})) = \dim(\mathrm{E}) \times \dim(\mathrm{F})$. Montrer que $a \longmapsto \varphi_a$ est linéaire et injective et conclure avec un argument sur les dimensions.

6 Montrer que $a \otimes x$ est dans l'ensemble d'arrivée indiqué, pour tout $a \in \mathrm{E}$. Établir ensuite que $a \longmapsto a \otimes x$ est linéaire et injective. Justifier enfin que l'ensemble d'arrivée a la même dimension que E.

7 Compléter x en une base de E et écrire la matrice de $a \otimes x$ dans cette base.

Partie III

8 Procéder par récurrence pour l'existence et les valeurs de $f_0^{(k)}$ et $f_1^{(k)}$.

9 Justifier que $(u + t\,v)^p = 0$ et utiliser l'unicité de la relation démontrée à la question 8.

10 A l'aide des propriétés de la trace, simplifier $\mathrm{Tr}\,(f_1^{(k+1)})$ à partir de sa valeur donnée à la question 8. Montrer ensuite que $(u + t\,v)^{k+1}$ est de trace nulle et développer cette expression.

11 Établir que $t \longmapsto (a \mid (u + t\,v)^{p-1}(y))$ est la fonction nulle, puis que c'est une fonction polynomiale en t. Utiliser l'égalité $(\mathrm{K}(\mathcal{V})^\perp)^\perp = \mathrm{K}(\mathcal{V})$.

12 Prouver l'existence par récurrence sur k. Considérer ensuite le cas $k = p$.

Partie IV

13 Montrer que $v \longmapsto v(x)$ et $u \longmapsto \overline{u}$ sont linéaires.

14 Appliquer le théorème du rang à $v \longmapsto v(x)$ et $u \longmapsto \overline{u}$ et voir $\mathcal{V}x$, $\mathcal{W}$, $\overline{\mathcal{V}}$ et $\mathscr{Z}$ comme noyaux ou images de ces applications.

15 Justifier que $\mathscr{Z} \subset \{u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \mid \mathrm{Im}\,(u) \subset \mathrm{Vect}\,(x)\}$ et utiliser l'isomorphisme de la question 6.

16 Noter $v = a \otimes x$ et montrer que $u^k\,v = a \otimes u^k(x)$. Appliquer ensuite le lemme C et la question 7.

17 Montrer qu'un endomorphisme nilpotent n'a pas de valeur propre non nulle.

Obtenir alors que $\mathrm{Vect}\,(x)$ et $\mathcal{V}x$ sont en somme directe.

18 Établir la relation par récurrence sur k.

19 Combiner les informations obtenues aux questions 14, 15, 17, 18 et le théorème A.

20 Appliquer l'hypothèse de récurrence à $\overline{\mathcal{V}}$ pour obtenir une base B' de H et montrer que $\overline{\mathcal{V}} = \mathcal{N}_{\mathrm{B}'}$. Compléter ensuite B' par le vecteur x.

21 Avec la question 4, montrer que $\mathrm{Im}\,(v^{p-1}) \subset \mathrm{Vect}\,(v^{k-1}(x))$ où k est le plus petit entier tel que $v^k(x) = 0$. Utiliser ensuite la question 19.

22 Justifier que $t \longmapsto (v + t\,v_0)(x)$ s'annule au plus une fois sur $\mathbb{R}$ et en déduire que

$$\mathrm{Im}\,((v + t\,v_0)^{p-1}) \subset \mathrm{Vect}\,(x) \oplus \mathcal{V}x$$

Considérer ensuite $f(t) = (a \,|\, (v + t\,v_0)(y))$ pour $t \in \mathbb{R}$, $a \in (\mathrm{Vect}\,(x) \oplus \mathcal{V}x)^\perp$ et $y \in \mathrm{E}$.

23 Raisonner par l'absurde.

I. Généralités sur les endomorphismes nilpotents

$\boxed{1}$ D'après un corollaire du théorème de d'Alembert-Gauss, le polynôme caractéristique χ_M de M est scindé dans $\mathbb{C}[X]$. D'après le cours, toute matrice dont le polynôme caractéristique est scindé est trigonalisable. Par conséquent,

$$\boxed{\text{La matrice M est semblable à une matrice triangulaire supérieure } T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}).}$$

Comme M et T sont semblables, M^k et T^k sont semblables pour $k \in \mathbb{N}^*$. Notons $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les coefficients diagonaux de T. Comme T est triangulaire supérieure, les coefficients diagonaux de T^k sont $({\lambda_1}^k, \ldots, {\lambda_n}^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme u est nilpotent, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$. On a alors $M^p = 0$ (car M^p représente u^p) donc $T^p = 0$, d'où ${\lambda_1}^p = \cdots = {\lambda_n}^p = 0$ et $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Ainsi

$$\boxed{\text{Les coefficients diagonaux de T sont nuls.}}$$

Dès lors, pour tout entier naturel k non nul, il vient

$$\mathrm{Tr}\,(u^k) = \mathrm{Tr}\,(M^k) = \mathrm{Tr}\,(T^k) = \sum_{i=1}^{n} {\lambda_i}^k = 0$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathrm{Tr}\,(u^k) = 0}$$

Il est possible de montrer que la réciproque est vraie : si un endomorphisme u d'un espace vectoriel de dimension finie vérifie $\mathrm{Tr}\,(u^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, alors u est nilpotent. Cette propriété caractérise donc les endomorphismes nilpotents.

Pour démontrer cette réciproque, on raisonne par l'absurde en supposant qu'une matrice M qui représente u a au moins une valeur propre complexe non nulle. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ toutes les valeurs propres complexes non nulles de M (deux à deux distinctes) et $n_1, \ldots, n_r$ leurs multiplicités respectives. Comme M est trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il vient

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathrm{Tr}\,(M^k) = \mathrm{Tr}\,(u^k) = \sum_{i=1}^{r} n_i\, {\lambda_i}^k = 0$$

En regardant les r premières équations ainsi obtenues pour $k \in [\![1\,; r]\!]$, on voit que $(n_1, \ldots, n_r)$ est solution d'un système homogène dont le déterminant D est de type Vandermonde :

$$D = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \cdots & \cdots & \lambda_r \\ {\lambda_1}^2 & \cdots & \cdots & {\lambda_r}^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ {\lambda_1}^r & \cdots & \cdots & {\lambda_r}^r \end{vmatrix} = (\lambda_1 \cdots \lambda_r) \times \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \cdots & \lambda_r \\ \vdots & & & \vdots \\ {\lambda_1}^{r-1} & \cdots & \cdots & {\lambda_r}^{r-1} \end{vmatrix}$$

Celui-ci est non nul car les $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont tous non nuls et deux à deux distincts. On en déduit que $(n_1, \ldots, n_r) = (0, \cdots, 0)$, ce qui est absurde. Par suite, $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{0\}$ et la matrice M est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte. On peut alors montrer (à l'aide d'une récurrence) que $M^n = 0$, d'où $u^n = 0$.

Mines Maths 2 PC 2020 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Philippe Bouafia (professeur agrégé en école d'ingénieurs) ; il a été relu par Thierry Limoges (professeur en CPGE) et Florian Metzger (professeur en CPGE).

Le sujet porte sur l'approximation de fonctions continues par des fonctions polynomiales ou par des produits de fonctions polynomiales avec la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2/2}$.

- La partie I réunit quelques résultats nécessaires aux développements des parties suivantes. On y introduit la fonction Γ d'Euler, dont on prouve les propriétés élémentaires. La partie se termine par plusieurs questions de cours faciles sur la notion de projection sur un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien.
- La partie II est consacrée à l'étude de l'espace vectoriel E_α (pour $\alpha > -1$) des fonctions continues $f\colon\ [\,0\,;+\infty\,[\, \to \mathbb{R}$ telles que l'intégrale

  $$\int_0^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x} f(x)^2 \,\mathrm{d}x$$

  soit convergente. Cet espace est le cadre d'étude pour les théorèmes d'approximation qui seront étudiés dans la dernière partie. Il est suffisamment général pour inclure toutes les fonctions polynomiales, qui jouent un rôle primordial en analyse. Il est muni d'un produit scalaire naturel $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini par

  $$\forall (f,g) \in {\mathrm{E}_\alpha}^2 \qquad \langle f,g\rangle = \int_0^{+\infty} x^\alpha \mathrm{e}^{-x} f(x) g(x) \,\mathrm{d}x$$

  Ce produit scalaire induit la norme $\|\cdot\|_\alpha$. Son importance vient du fait que les fonctions de E_α peuvent être approchées par des fonctions polynomiales en norme $\|\cdot\|_\alpha$. On construit une famille orthogonale (pour ce produit scalaire) de fonctions polynomiales, les polynômes de Laguerre.
- La dernière partie constitue le cœur thématique de l'épreuve, même si le traitement intégral des deux premières a déjà permis au candidat de prouver sa valeur. Elle contient les questions les plus délicates. Les deux dernières, notamment, établissent des théorèmes d'approximation qui justifient le titre de l'épreuve.

Si les deux premières parties sont indépendantes, leurs résultats sont abondamment utilisés dans la troisième partie, qui exigeait de bonnes capacités de synthèse. Dans l'ensemble, le sujet, de longueur raisonnable, contient nombre de questions très abordables, y compris dans la dernière partie, et fait appel à des outils classiques d'analyse : séries entières, interversion série-intégrale et famille de polynômes orthogonaux.

Indications

Partie I

1 Pour tout $x > 0$, étudier l'intégrabilité de la fonction $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ en 0 et en $+\infty$.

2 Effectuer une intégration par parties.

3 Appliquer la règle de d'Alembert.

7 Appliquer le théorème de Pythagore.

Partie II

8 Développer $(|a| - |b|)^2$.

11 Par des arguments de linéarité, il suffit de montrer que les fonctions monomiales, c'est-à-dire de la forme $x \mapsto x^n$, où $n \in \mathbb{N}$, appartiennent à E_α.

13 Calculer ${\varphi_n}^{(n)}$ à l'aide de la formule de Leibniz.

15 Montrer que la fonction ${\varphi_n}^{(k)}$ s'écrit comme une combinaison linéaire de fonctions de la forme $x \mapsto x^\beta \mathrm{e}^{-x}$, avec $\beta > 0$.

16 Intégrer par parties de manière successive.

17 Montrer que la fonction ${\psi_n}^{(n)}$ est constante.

Partie III

18 Calculer $\langle f_k, \psi_n \rangle$ à l'aide d'intégrations par parties successives, puis reconnaître dans la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\langle f_k, \psi_n \rangle}{{\|\psi_n\|_\alpha}^2}$$

un cas particulier de la somme de la question 4, à un coefficient multiplicatif près.

19 Calculer d'une part ${\|f_k\|_\alpha}^2$ et appliquer d'autre part le résultat de la question 7.

20 Effectuer une projection orthogonale sur $\mathrm{V_N}$, avec N bien choisi.

21 Remarquer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $g(x) = f(\mathrm{e}^{-x})$, où g est définie dans l'énoncé.

22 Utiliser le résultat de la question 21, et approcher à leur tour les fonctions f_k par des polynômes.

I. Résultats préliminaires

1 Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons en premier lieu que la fonction $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$, définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, y est intégrable, ce qui établira que la fonction Γ est bien définie en x. Pour cela, étudions l'intégrabilité de cette fonction aux extrémités du domaine d'intégration.

- Étude en 0 : puisque $\lim\limits_{t\to 0} \mathrm{e}^{-t} = 1$, on a l'équivalence suivante
$$t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$$
De plus, comme $1 - x < 1$, la fonction positive $t \mapsto 1/t^{1-x}$ est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ par le critère de Riemann. Par équivalence, il en est de même pour la fonction $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$.
- Étude en $+\infty$: cette fois, on a la relation de négligeabilité $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{o}\left(\mathrm{e}^{-t/2}\right)$ valable en $+\infty$. En effet,
$$\frac{t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{-t/2}} = t^{x-1}\mathrm{e}^{-t/2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$
par croissances comparées. L'intégrabilité sur $[\,1\,;+\infty\,[$ de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t/2}$ implique alors celle de la fonction dominée $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$.

Il résulte de la discussion précédente que la fonction $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme elle est à valeurs strictement positives, son intégrale sur $]\,0\,;+\infty\,[$ est elle-même strictement positive.

$$\boxed{\text{La fonction } \Gamma \text{ est bien définie et est à valeurs dans } \mathbb{R}_+^*.}$$

2 Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Les applications $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ et $t \mapsto t^x/x$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par croissances comparées, $t^x\mathrm{e}^{-t} \to 0$ lorsque $t \to +\infty$. De plus, en partant de l'écriture $t^x\mathrm{e}^{-t} = \exp(x \ln t - t)$, on montre, par composition de limites, que
$$\lim_{t\to 0^+} t^x\mathrm{e}^{-t} = \lim_{-\infty} \exp = 0$$
La paragraphe précédent établit l'existence du crochet
$$\left[\frac{t^x}{x}\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^x}{x}\mathrm{e}^{-t} - \lim_{t\to 0^+} \frac{t^x}{x}\mathrm{e}^{-t} = 0 - 0 = 0$$
Il en résulte que les intégrales
$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} t^x\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)\,\mathrm{d}t$$
sont de même nature. La première est convergente d'après le résultat de la question 1. On peut ainsi effectuer l'intégration par parties suivante
$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^x}{x}\mathrm{e}^{-t}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} t^x\left(-\mathrm{e}^{-t}\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} t^{(x+1)-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$
ce qui revient à dire que
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)}$$

> On peut étendre la fonction Γ à $\mathbb{R} \smallsetminus \{0, -1, -2, \dots\}$ de sorte que la formule précédente reste valable. Pour cela, on définit d'abord $\Gamma(x) = \Gamma(x+1)/x$ pour tout $x \in\,]-1\,;0\,[$, puis on réutilise cette formule pour définir $\Gamma(x)$ pour $x \in\,]-2\,;-1\,[$, et ainsi de suite. Cependant, la formule intégrale de la question 1 n'est valable que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Un calcul direct donne $\Gamma(1) = 1$. À l'aide de la formule précédente, on peut prouver par récurrence que $\Gamma(n+1) = n\,!$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. En ce sens, la fonction Γ généralise les factorielles. Elle trouve ainsi des applications dans tous les domaines des mathématiques, y compris en arithmétique.

3 Notons d'abord que $a_n > 0$, comme on l'a vu à la question 1, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. En vue d'appliquer la règle de d'Alembert, on calcule le quotient

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| &= \frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{(n+1)\,!}\,\frac{n\,!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\,|x| \\
&= \frac{(n+\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)}{(n+1)n\,!}\,\frac{n\,!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\,|x| \qquad \text{(question 2)} \\
\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| &= \frac{n+\alpha+1}{n+1}\,|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|
\end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $|x| < 1$, la série $\sum a_n x^n$ converge absolument, et lorsque $|x| > 1$, elle diverge grossièrement. On conclut que

$$\boxed{\text{La série entière } \sum a_n x^n \text{ a pour rayon de convergence 1.}}$$

Qu'en est-il de la convergence au bord de l'intervalle $]-1\,;1\,[$, c'est-à-dire aux points $x = -1$ et $x = 1$?

- Cas $\alpha \geqslant 0$ et $x = -1$: le calcul précédent montre que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+\alpha+1}{n+1} \geqslant 1$$

  Ainsi, la suite positive $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Comme de plus, $a_0 > 0$, il s'en suit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 et que la série $\sum a_n(-1)^n$ diverge grossièrement.

- Cas $\alpha \in\,]-1\,;0\,[$ et $x = -1$: On observe d'abord que la série de terme général $a_n(-1)^n$ est alternée. Comme

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+\alpha+1}{n+1} \leqslant 1$$

  et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, elle est décroissante. Il ne reste plus qu'à prouver qu'elle tend vers 0 pour pouvoir appliquer le critère spécial des séries alternées et conclure à la convergence de $\sum a_n(-1)^n$. On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\ln a_{n+1} - \ln a_n &= \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \\
&= \ln\left(1 + \frac{\alpha}{n+1}\right) \\
\ln a_{n+1} - \ln a_n &\sim \frac{\alpha}{n+1} \sim \frac{\alpha}{n} \qquad (\alpha \neq 0)
\end{aligned}$$

  Par comparaison avec la série de terme général α/n de signe négatif, la série de terme général $\ln a_{n+1} - \ln a_n$ diverge vers $-\infty$. On en déduit par télescopage que

$$\ln a_n - \ln a_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (\ln a_{k+1} - \ln a_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$$

  d'où le fait que $a_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

Mines Informatique MP-PC-PSI 2020 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Julien Dumont (professeur en CPGE) ; il a été relu par William Aufort (professeur en CPGE) et Vincent Puyhaubert (professeur en CPGE).

Ce sujet s'intéresse à différents aspects de la fabrication d'images de synthèse, dans le contexte d'une scène contenant des bateaux oscillant à la surface de l'eau dans un canal. L'énoncé comporte trois parties.

- La partie I introduit les notions nécessaires pour la suite du sujet. Elle débute par trois questions assez élémentaires sur les bases de données sans lien avec la suite, puis les volumes des différents objets de la scène sont définis à partir du maillage de leurs surfaces. L'énoncé étudie les fonctions implémentant des opérations géométriques utiles, puis quelques éléments liés à la réduction d'une surface à ses sommets principaux, en enlevant les éventuels doublons dus à de légers écarts en précision.
- La partie suivante prend le prétexte de la génération de vagues pour poser quelques questions sur la mise en forme de données récupérées dans un fichier texte et sur une alternative au stockage brut des données : l'utilisation de matrices creuses.
- La dernière partie cherche à rendre réaliste l'évolution d'un bateau soumis à une vague, grâce à la poussée d'Archimède appliquée à un modèle des parties des bateaux qui sont situées sous l'eau.

Ce sujet assez facile fait appel à de nombreuses notions des deux années de classe préparatoire. La récursivité et le tri fusion font l'objet de quelques questions dans la dernière partie, les premières étant essentiellement concentrées sur les bases de données, la programmation et la complexité.

C'est un bon sujet de révision qui pâtit toutefois de plusieurs imprécisions qui nuisent à la clarté de certaines questions. Mais cela reste un très bon entraînement aux contraintes spécifiques des Mines, à savoir un sujet court durant lequel il faut être efficace, rapide, et ne pas se laisser perturber par un énoncé parfois contradictoire ou une question (Q17) à la très grande limite de ce qui peut être exigé au concours en terme de fonctions.

Indications

Partie I

3 Bien identifier dans la lecture des tables à quoi correspond la variable `x` et ce que contient la table issue de la jointure.

6 La fonction `ps` n'apparaît pas dans les fonctions fournies, il y a donc eu un renommage.

10 Ne pas hésiter à utiliser les fonctions de la bibliothèque fournie.

13 Le `return` est manifestement indenté une fois de trop.

Partie II

16 Beaucoup de pièges dans cette question : il faut faire attention aux conversions de types entre les chaînes de caractères du fichier texte et les nombres que l'on veut sauvegarder, en utilisant la fonction de conversion en chaînes de caractères `str`. Par ailleurs, il n'y a ni point-virgule après le dernier caractère de chaque ligne, ni saut de ligne après le dernier caractère de la matrice.

17 Pour ouvrir un fichier en écriture, il faut créer un « objet-fichier » en utilisant la commande `open("nomdufichier.txt","w")`. Il faut aussi le fermer à la fin pour que l'écriture soit effective, grâce à la méthode `close()`.

18 Bien détailler les caractères dénombrés selon leur type : entier, flottant, points-virgules, retours à la ligne...

19 Faire l'hypothèse que le zéro est codé par un seul caractère.

Partie III

21 La facette est immergée si la hauteur d'eau est au-dessus de la cote du barycentre de la facette.

22 Utiliser les deux formules données par l'énoncé.

23 Seule la composante de la résultante selon $\overrightarrow{e_z}$ est demandée.

24 L'énoncé n'impose rien de particulier comme complexité pour la fusion, une version itérative est toutefois plus simple. Celle-ci peut, par exemple, consister à remplir au fur et à mesure une liste de longueur `len(L1) + len(L2)` avec les éléments pertinents.

25 L'énoncé impose une version récursive de l'algorithme. Utiliser la méthode « diviser pour régner » : on coupe la liste en deux, on trie les deux morceaux, puis on fusionne les résultats.

26 Attention à inclure la facette médiane.

27 L'énoncé est erroné car il n'est pas possible avec des listes (mais cela le serait avec des tableaux NumPy) de s'en sortir avec l'amorce de code des deux lignes à compléter. Réécrire donc totalement ces deux lignes.

I. Création d'un objet dans la scène

1 L'information sur le nombre de maillages est contenue intégralement dans la table `maillages_bateau` et s'obtient grâce à la requête

```
SELECT COUNT(*) FROM maillages_bateau
```

> Il y a deux solutions alternatives, en changeant l'argument du `COUNT`: `COUNT(id)` ou `COUNT(nom)`. Cela était en effet possible car chaque enregistrement possède une valeur pour ces deux champs.

2 Cette fois-ci, une jointure est nécessaire afin de récupérer les informations recherchées qui sont présentes dans les tables `maillages_bateau` et `faces`. Cette jointure s'effectue en notant la concordance entre les colonnes `maillage` et `id`. Notons enfin que toutes les colonnes ont des noms différents, il n'est donc pas nécessaire de faire des alias. On peut alors proposer par exemple la requête

```
SELECT numero
FROM maillages_bateau JOIN faces ON id = maillage
WHERE nom = "gouvernail"
```

3 L'étude du `FROM ... JOIN ... ON` permet tout d'abord de voir que les trois tables sont nécessaires à cette requête, et que la table issue de cette jointure permet de regrouper les coordonnées de l'ensemble des points du maillage. L'analyse du `WHERE` permet de voir que l'on retient le maillage `coque`. Enfin, le `SELECT` renvoie l'écart entre les deux valeurs extrêmes des abscisses. Autrement dit,

$$\boxed{\text{La requête renvoie l'amplitude du maillage de la coque selon la direction } \overrightarrow{e_x}.}$$

4 Il faut renvoyer la deuxième coordonnée du premier élément de la première liste, en faisant attention à l'indexation démarrant à 0 en Python et en respectant l'ordre d'extraction. L'expression est ainsi

```
maillage_tetra[0][0][1]
```

5 Comme expliqué à la question précédente, `maillage_tetra[1]` se réfère à la face dont les sommets sont successivement `[0.,0.,0.]`, `[0.,1.,0.]` et `[1.,0.,0.]`, autrement dit les sommets respectifs A, D et B. Ainsi,

L'expression `maillage_tetra[1]` correspond à la face S_4.

6 La seule fonction appelée dans le code proposé est le produit scalaire, mais sous un autre nom que celui donné dans la documentation. Il y a donc eu un renommage. Le première ligne du code est par conséquent

```
from operations_vectorielles import prod_scalaire as ps
```

7 Le code proposé renvoie la racine carrée de la somme des carrés des composantes du vecteur pris en argument d'entrée, par conséquent

La fonction `mystere1` calcule la norme euclidienne d'un vecteur.

$\boxed{8}$ Il s'agit d'écrire une fonction qui renvoie un vecteur dont les composantes sont celles du vecteur en argument d'entrée multipliées chacune par une même constante. Le sujet précise de plus en introduction que les vecteurs considérés sont des listes de trois flottants. Par suite, on peut proposer

```
def multiplie_scalaire(a, V):
    return [a*V[0], a*V[1], a*V[2]]
```

> On peut proposer le code suivant, plus général car le vecteur d'entrée admet un nombre arbitraire de composantes :
>
> ```
> def multiplie_scalaire(a, V):
>     return [a*v for v in V]
> ```

$\boxed{9}$ Ici, on cherche le barycentre de trois points constituant une face, il s'agit donc de calculer la moyenne de chaque coordonnée des sommets en question. Une première boucle, indiquée dans le code, balaie chaque sommet tandis qu'une seconde permet d'en récupérer les coordonnées (abscisse, ordonnée et cote) et d'ajouter les termes permettant de calculer la moyenne. Comme deux lignes seulement sont proposées, on ne peut faire la somme des coordonnées avant de diviser par trois, il faut plutôt ajouter à chaque étape la contribution de la nouvelle coordonnée balayée divisée par trois. Finalement, le code complet que l'on peut proposer est

```
def barycentre(F):
    G = [0,0,0]
    for i in range(3):
        for j in range(3):
            G[j] = G[j] + F[i][j]/3
    return G
```

> Même si c'est souvent assez évident, le sujet est radin en définition des arguments des différentes fonctions. Ici par exemple, il faut comprendre que `F` est une facette.
>
> Le code suivant utilise les fonctions proposées par l'énoncé, il serait tout aussi valable s'il n'y avait pas le squelette du code dans le sujet.
>
> ```
> def barycentre(F):
>     somme = addition(F[0], addition(F[1], F[2]))
>     return multiplie_scalaire(1/3, somme)
> ```

$\boxed{10}$ On utilise les fonctions de la bibliothèque proposée par l'énoncé, d'abord pour calculer les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis pour effectuer leur produit vectoriel. L'usage de la fonction `mystere1` étudiée à la question 7 permet de terminer le code.

```
def normale(F):
    AB = soustraction(F[1], F[0])
    AC = soustraction(F[2], F[0])
    PV = prod_vectoriel(AB, AC)
    norme = mystere1(PV)
    return multiplie_scalaire(1/norme, PV)
```

Notons que l'hypothèse d'aire non nulle — sous réserve que les calculs flottants soient exacts — assure que la quantité `norme` est également non nulle et donc que la division est licite.

X/ENS Maths PC 2020 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Quentin Guilmant (ENS de Lyon) ; il a été relu par Angèle Niclas (ENS de Lyon) et Benjamin Monmege (enseignant-chercheur à l'université).

Ce sujet propose l'étude d'une méthode d'interpolation, différente de celle habituellement rencontrée en classe préparatoire utilisant les polynômes de Lagrange. La construction est nettement plus technique et fait l'objet de cinq parties. L'énoncé prend (gentiment) la peine de préciser que les parties I et II sont indépendantes des parties III et IV, tandis que la partie V utilise tout ce qui précède.

- Dans la partie I, on commence par étudier l'espace $\mathrm{Sym}^+(p)$ des matrice symétriques réelles positives de taille p. Le but de cette partie est principalement de montrer que l'ensemble de ces matrices est stable par le produit de Hadamard qui consiste, contrairement au produit matriciel usuel, à effectuer un produit coefficient par coefficient.
- La partie II poursuit sur cette lancée en démontrant que l'exponentielle d'une matrice symétrique positive reste symétrique positive. On en déduit en toute fin de partie qu'une matrice de la forme $(e^{-(x_i-x_j)^2/2\lambda})_{i,j\in[\![1\,;\,p]\!]}$ où les $(x_i)_{i\in[\![1\,;\,p]\!]}$ sont des réels quelconques et $\lambda > 0$, est un élément de $\mathrm{Sym}^+(p)$, ce qui est en fait l'objectif visé par ces deux premières parties.
- La partie III introduit l'espace vectoriel $\mathscr{E}$ des fonctions à décroissance rapide en $\pm\infty$. On étudie notamment sa structure euclidienne et un endomorphisme C, à base de convolution, dont l'utilité est encore à ce stade un peu obscure.
- En partie IV, on s'intéresse au sous-espace vectoriel $\mathcal{G}$ de $\mathscr{E}$ engendré par les translations et les dilatations de la fonction gaussienne $x \longmapsto \exp(-x^2)$. On en profite pour définir un produit scalaire spécifique sur l'image $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ par l'endomorphisme C de la partie précédente.
- C'est dans la partie V que la notion d'interpolation fait surface. Les éléments de l'ensemble $\mathcal{H}$ de la partie précédente prennent maintenant le nom de fonctions interpolantes. C'est parmi ces fonctions que l'on cherche, pour deux p-uplets fixés $(x_i)_{i\in[\![1\,;\,p]\!]}$ et $(a_i)_{i\in[\![1\,;\,p]\!]}$, un élément h de norme minimale qui prend la valeur α_i en x_i pour tout i (les $(x_i)_{i\in[\![1\,;\,p]\!]}$ étant bien entendu supposés deux à deux distincts). On montre notamment qu'un tel élément existe et est unique.

Le sujet permettait de vérifier que les candidats maîtrisaient l'algèbre linéaire, en particulier l'inégalité de Cauchy-Schwarz afin d'établir des majorations. Les questions portant sur l'intégrabilité des fonctions sur $\mathbb{R}$ sont également omniprésentes.

Indications

Partie I

3.c On pensera à utiliser le théorème spectral sur A et sur B.

Partie II

4.b Montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{A}^{(k)} \in \mathrm{Sym}^+(p)$.

6.c Trouver une matrice B et un vecteur v tels que $\mathrm{K} = \exp[\mathrm{B}] \odot \left(vv^{\mathrm{T}}\right)$ pour appliquer la question 5.c.

Partie III

7 Utiliser la définition de $\mathscr{E}$ pour majorer $|fg|$ par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.

8.b Fixer $\delta > 0$ et trouver $\mu > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R} \smallsetminus \left]\, x - \delta\,; x + \delta \,\right[$ on ait la majoration $\exp\left(-(y-x)^2/\lambda\right) \leqslant \exp\left(-y^2/\mu\right)$. Pour $y \in [\, x - \delta\,; x + \delta\,]$, on peut se rendre compte qu'au voisinage de x, la fonction $y \mapsto \exp\left(-y^2/\mu\right)$ admet un minimum strictement positif.

Partie IV

11.a Utiliser l'indication puis le changement de variable $z = y - (x + x')/2$.

12.a Pour l'hérédité, penser à dériver la fonction et remarquer que l'on peut simplifier l'écriture.

12.b Ne surtout pas conclure trop vite en affirmant que C envoie une base sur une base. Les espaces sont de dimensions infinies.

13.c Remarquer que $\|h\|_\infty$ est atteinte en un certain x. Utiliser la question 13.b sur ce x, puis appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Enfin, calculer $\|\tau_x(\gamma_{2\lambda})\|_{\mathcal{H}}$.

Partie V

14 Pour h_1 et h_2 deux éléments de $\mathcal{S}_*$, poser $h_3 = (h_1 + h_2)/2$. Majorer $\mathrm{J}(h_3)$ à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

15 Faire un raisonnement par l'absurde en supposant qu'il existe $h_0 \in \mathcal{H}_0$ tel que $(h_0 \mid \widetilde{h})_{\mathcal{H}} > 0$. Ensuite, étudier le polynôme $\mathrm{P}(a) = \mathrm{J}(\widetilde{h} - a h_0)$.

16.a Étudier la différence entre un élément de $\mathcal{S} \cap {\mathcal{H}_0}^{\perp}$ et un élément de $\mathcal{S}$.

17.b Prendre $u \in \operatorname{Ker} \mathrm{K}$ et étudier $u^{\mathrm{T}}\mathrm{K}u$.

Partie I

1 Prenons $\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathrm{Sym}^+(p)$. Alors pour a et b des réels positifs, et pour tout couple $(i,j) \in [\![1\,;p]\!]^2$,

$$\begin{aligned}(a\mathrm{A}+b\mathrm{B})_{ij} &= a\mathrm{A}_{ij}+b\mathrm{B}_{ij}\\ &= a\left(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\right)_{ij}+b\left(\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\right)_{ij} \quad \text{(matrices symétriques)}\\ &= a\mathrm{A}_{ji}+b\mathrm{B}_{ji}\\ (a\mathrm{A}+b\mathrm{B})_{ij} &= (a\mathrm{A}+b\mathrm{B})_{ji}\end{aligned}$$

Autrement dit, $$(a\mathrm{A}+b\mathrm{B})^{\mathrm{T}} = a\mathrm{A}+b\mathrm{B}$$
c'est-à-dire que la matrice est symétrique. De plus, pour $u \in \mathbb{R}^p$,

$$u^{\mathrm{T}}(a\mathrm{A}+b\mathrm{B})u = \underbrace{a}_{\geqslant 0}\underbrace{u^{\mathrm{T}}\mathrm{A}u}_{\geqslant 0}+\underbrace{b}_{\geqslant 0}\underbrace{u^{\mathrm{T}}\mathrm{B}u}_{\geqslant 0} \geqslant 0$$

Finalement, $$\boxed{\forall a,b \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall \mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathrm{Sym}_+(p) \qquad a\mathrm{A}+b\mathrm{B} \in \mathrm{Sym}^+(p)}$$

2 Utilisons l'identité sur la transposée d'un produit matriciel :

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \quad \forall \mathrm{N} \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R}) \qquad (\mathrm{MN})^{\mathrm{T}} = \mathrm{N}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}^{\mathrm{T}}$$

où p,q,r sont des entiers naturels. Pour $v \in \mathbb{R}^p$ et $\mathrm{A} = vv^{\mathrm{T}}$,

$$\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \left(vv^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \left(v^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}v^{\mathrm{T}} = vv^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}$$

De plus, pour $u \in \mathbb{R}^p$,
$$\begin{aligned}u^{\mathrm{T}}\mathrm{A}u &= u^{\mathrm{T}}vv^{\mathrm{T}}u\\ &= (v^{\mathrm{T}}u)^{\mathrm{T}}(v^{\mathrm{T}}u)\\ &= (v^{\mathrm{T}}u)(v^{\mathrm{T}}u) \qquad \text{(car } v^{\mathrm{T}}u \in \mathbb{R})\\ &= (v^{\mathrm{T}}u)^2\\ u^{\mathrm{T}}\mathrm{A}u &\geqslant 0\end{aligned}$$

Puis, $$\boxed{\forall v \in \mathbb{R}^p \qquad vv^{\mathrm{T}} \in \mathrm{Sym}^+(p)}$$

3.a Soient u,v deux vecteurs de $\mathbb{R}^p$ et $(i,j) \in [\![1\,;p]\!]^2$. Alors

$$\begin{aligned}\left(\left(uu^{\mathrm{T}}\right)\odot\left(vv^{\mathrm{T}}\right)\right)_{ij} &= u_iu_jv_iv_j\\ &= (u_iv_i)(u_jv_j)\end{aligned}$$
[1mm]
$$\begin{aligned}\phantom{\left(\left(uu^{\mathrm{T}}\right)\odot\left(vv^{\mathrm{T}}\right)\right)_{ij}} &= (u\odot v)_i(u\odot v)_j\\ \left(\left(uu^{\mathrm{T}}\right)\odot\left(vv^{\mathrm{T}}\right)\right)_{ij} &= \left((u\odot v)(u\odot v)^{\mathrm{T}}\right)_{ij}\end{aligned}$$

d'où $$\boxed{\left(uu^{\mathrm{T}}\right)\odot\left(vv^{\mathrm{T}}\right) = (u\odot v)(u\odot v)^{\mathrm{T}}}$$

3.b La matrice A est symétrique réelle. Le théorème spectral assure que A est diagonalisable en base orthonormée. Soit $(u_1,\ldots,u_p)$ le p-uplet de vecteurs propres de A formant une famille orthonormale. Soit P la matrice de changement de base de la base canonique dans cette nouvelle base. On a alors

$$\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{\mathrm{T}}$$

où D est la matrice diagonale dont les coefficients sont les $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$, les valeurs propres associées. La matrice P a pour colonnes les vecteurs $u_1,\ldots,u_p$ et P^{T} a pour lignes leurs transposés, les vecteurs ${u_1}^{\mathrm{T}},\ldots,{u_p}^{\mathrm{T}}$. Par suite,

$$\boxed{\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{p}\lambda_k u_k {u_k}^{\mathrm{T}}}$$

De plus, $\qquad \forall k \in [\![1\,;p]\!] \qquad 0 \leqslant {u_k}^{\mathrm{T}} \mathrm{A} u_k = \lambda_k {u_k}^{\mathrm{T}} u_k = \lambda_k {\|u_k\|_2}^2$

Puis, $\qquad \boxed{\forall k \in [\![1\,;p]\!] \qquad \lambda_k \geqslant 0}$

3.c Soient $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{Sym}^+(p)$. En appliquant le théorème spectral, A et B sont diagonalisables en base orthonormée. Soient donc $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_p)$ les valeurs propres respectivement de A et B. D'après la question 3.b, elles sont positives (ou nulles). Soient aussi $(u_1, \ldots, u_p)$ et $(v_1, \ldots, v_p)$ des bases orthonormées de vecteurs propres associées. Alors, d'après la question 3.b,

$$\mathrm{A} = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k {u_k}^{\mathrm{T}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B} = \sum_{\ell=1}^{p} \mu_\ell v_\ell {v_\ell}^{\mathrm{T}}$$

L'opération $\odot$ étant la multiplication coefficient à coefficient, elle hérite des propriétés algébriques de la multiplication usuelle sur les réels. En particulier, elle est bilinéaire. En utilisant cette propriété, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} \odot \mathrm{B} &= \left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k u_k {u_k}^{\mathrm{T}} \right) \odot \left(\sum_{\ell=1}^{p} \mu_\ell v_\ell {v_\ell}^{\mathrm{T}} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \left(u_k {u_k}^{\mathrm{T}} \right) \odot \left(\sum_{\ell=1}^{p} \mu_\ell v_\ell {v_\ell}^{\mathrm{T}} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{p} \lambda_k \mu_\ell \left(u_k {u_k}^{\mathrm{T}} \right) \odot \left(v_\ell {v_\ell}^{\mathrm{T}} \right) \\
\mathrm{A} \odot \mathrm{B} &= \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{p} \lambda_k \mu_\ell (u_k \odot v_\ell)(u_k \odot v_\ell)^{\mathrm{T}} \qquad \text{(question 3.a)}
\end{aligned}$$

D'après la question 2, pour tout $(k, \ell) \in [\![1\,;p]\!]^2$, on a $(u_k \odot v_\ell)(u_k \odot v_\ell)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{Sym}^+(p)$. De plus, les valeurs propres étant positives, on a aussi $\lambda_k \mu_\ell \geqslant 0$. Or, en utilisant la question 1, on obtient par récurrence immédiate que toute combinaison linéaire, avec coefficients positifs, de matrices de $\mathrm{Sym}^+(p)$ est encore dans $\mathrm{Sym}^+(p)$. Formellement,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n \in \mathrm{Sym}^+(p) \qquad \sum_{k=1}^{p} a_k \mathrm{A}_k \in \mathrm{Sym}^+(p)$$

Par suite, on en déduit que $\qquad \boxed{\mathrm{A} \odot \mathrm{B} \in \mathrm{Sym}^+(p)}$

Partie II

4.a Soit $(i, j) \in [\![1\,;p]\!]^2$. Remarquons d'abord que pour tout entier k,

$$\mathrm{A}_{ij}^{(0)} = 1 \qquad \mathrm{A}_{ij}^{(k+1)} = \mathrm{A}_{ij}^{(k)} \mathrm{A}_{ij}$$

On identifie une suite géométrique. On connaît donc son terme général :

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{A}_{ij}^{(k)} = (\mathrm{A}_{ij})^k$$

Puis, $\qquad \mathrm{P}[\mathrm{A}]_{ij} = \mathrm{P}(\mathrm{A}_{ij}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\mathrm{A}_{ij}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{A}_{ij}^{(k)} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{A}^{(k)} \right)_{ij}$

Autrement dit, $\qquad \boxed{\mathrm{P}[\mathrm{A}] = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{A}^{(k)}}$