MATHS

2de

128 méthodes et exercices corrigés
pour réussir les contrôles

- **Définitions et propriétés à connaître**
- **Méthodes de résolution**
- **Exercices corrigés de différents niveaux**
- **Contrôles avec une grille d'évaluation**

ellipses

Chapitre 1

ARITHMÉTIQUE

Objectifs

- **Méthode 1**
  Déterminer si un entier est un diviseur ou un multiple d'un autre entier.
- **Méthode 2**
  Étudier la divisibilité d'un entier exprimé sous forme littérale par un autre entier.
- **Méthode 3**
  Déterminer si un entier est premier.
- **Méthode 4**
  Décomposer un entier en produit de facteurs premiers.
- **Méthode 5**
  Déterminer l'ensemble des diviseurs d'un entier.
- **Méthode 6**
  Écrire une fraction d'entiers sous forme irréductible.
- **Méthode 7**
  Résoudre des problèmes faisant intervenir le plus grand diviseur commun et le plus petit multiple commun.
- **Méthode 8**
  Démontrer la parité d'un résultat d'opérations entre entiers dont on connaît la parité.

COURS

1. Diviseurs et multiples d'un entier

Définition

Ensembles d'entiers

L'ensemble des **entiers naturels** est $\mathbb{N}=\{0;1;2;3;...\}$. Ce sont les nombres qui se sont naturellement imposés à l'homme pour dénombrer les choses. L'ensemble des **entiers** est $\mathbb{Z}=\{...;-3;-2;-1;0;1;2;3;...\}$. Ce sont les nombres que l'on obtient en effectuant toutes les soustractions possibles entre deux entiers naturels. L'**arithmétique** est la discipline mathématique qui étudie les propriétés des nombres entiers. On la nomme également **théorie des nombres**.

Définition

Diviseur et multiple d'un entier

Un entier b est un **diviseur** d'un entier a si et seulement s'il existe un entier q tel que $a=b\times q$. On dira aussi que a est un **multiple** de b.

Méthode 1

Déterminons si 5 est un diviseur de 40 puis si 13 est un diviseur de 83.

$40=5\times 8$ donc 5 est un diviseur de 40.

$13\times 6<83<13\times 7$ donc 13 n'est pas un diviseur de 83.

→| Exercice 1

Définition

Parité

Un entier **pair** est un entier multiple de 2.

Un entier **impair** est un entier non multiple de 2.

Propriété

Tout entier pair a peut s'écrire $a=2q$ où q est un entier.

Tout entier impair a peut s'écrire $a=2q+1$ où q est un entier.

Méthode 2

1. Soit n un entier, déterminons la parité des entiers $A=3(2n+1)-1$ et $A'=5(1-3n)+9n$.
2. Soit n un entier, montrons que l'entier $A''=2(5n-3)+4(6-n)$ est multiple de 6.

1. $A=3(2n+1)-1=6n+3-1=6n+2=2(3n+1)$ qui est de la forme $2q$ avec $q=3n+1$ entier donc A est pair.
   $A'=5(1-3n)+9n=5-15n+9n=-6n+5=-6n+4+1$ $=2(-3n+2)+1$ qui est de la forme $2q+1$ avec $q=-3n+2$ entier donc A' est impair.
2. $A''=2(5n-3)+4(6-n)=10n-6+24-4n=6n+18=6(n+3)$ qui est de la forme $6q$ avec $q=n+3$ entier donc A'' est multiple de 6.

→| Exercice 2

2. Entiers premiers

Définition

Un entier naturel est **premier** s'il possède **exactement deux diviseurs distincts** : 1 et lui-même.

Propriété

Les entiers premiers inférieurs à 100 sont : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97.

Méthode 3

Déterminons si 299 est premier.

À l'aide de la calculatrice, on détermine que $\sqrt{299}\simeq 17,3$. Le plus grand entier inférieur ou égal à $\sqrt{299}$ est donc 17. On divise alors 299 successivement par les différents entiers premiers inférieurs ou égaux à 17 soit : 2, 3, 5, 7, 11, 13 et 17.

$299\div 2=149,5$ non entier

$299\div 3\simeq 99,7$ non entier

$299\div 5=59,8$ non entier

$299\div 7\simeq 42,7$ non entier

$299\div 11\simeq 27,2$ non entier

$299\div 13=23$ entier

299 admet d'autres diviseurs que 1 et lui-même (13 et 23) donc 299 n'est pas premier.

→| Exercice 3

3. Théorème fondamental de l'arithmétique et applications

Théorème

Tout entier supérieur ou égal à 2 peut se décomposer en un **produit de facteurs premiers**. C'est-à-dire qu'il peut s'écrire de manière unique comme le produit fini d'entiers premiers.

Méthode 4

Décomposons 126 en produit de facteurs premiers.

On divise 126 par le premier entier premier qui est 2 : $126 \div 2 = 63$.

Puisque le résultat est impair, on ne peut pas continuer de diviser le résultat obtenu par 2. On envisage la division par l'entier premier suivant qui est 3 : $63 \div 3 = 21$. On continue de diviser par 3 : $21 \div 3 = 7$ jusqu'à ce que le résultat ne soit plus un multiple de 3. On reconnaît un entier premier : 7 donc on ne peut que le diviser par lui-même pour finir par obtenir le résultat 1.

$$\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

La décomposition de 126 en produit de facteurs premiers est donc $126 = 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 2 \times 3^2 \times 7$

→| Exercice 4

Méthode 5

Déterminons les diviseurs de 126.

On décompose 126 en produit de facteurs premiers (méthode 4) : $126 = 2 \times 3^2 \times 7$.

On construit ensuite l'arbre des diviseurs de 126.

Il comporte trois étages car il y a trois facteurs distincts : 2, 3 et 7.

Le facteur 2 apparaît à la puissance 1.

Il y aura donc 2 branches au 1er étage ($2^0 = 1$ et $2^1 = 2$).

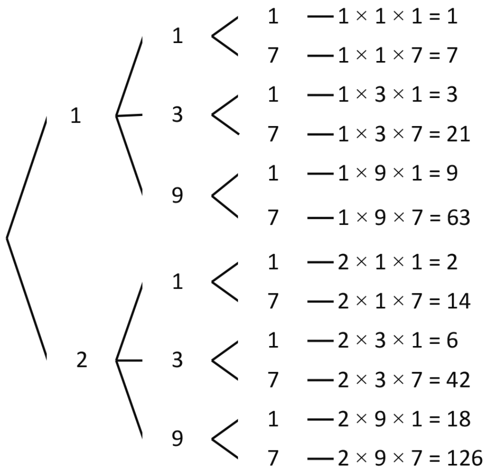
Le facteur 3 apparaît à la puissance 2.

Il y aura donc 3 branches au 2^{e} étage ($3^0 = 1, 3^1 = 3$ et $3^2 = 9$).

Le facteur 7 apparaît à la puissance 1.

Il y aura donc 2 branches au 3^{e} étage ($7^0 = 1$ et $7^1 = 7$).

Cours



L'ensemble des diviseurs de 126 est donc
$D_{126} = \{1;2;3;6;7;9;14;18;21;42;63;126\}$

→| Exercice 5

Méthode 6

Déterminons la fraction irréductible égale à $\frac{1144}{17017}$.

$1144 = 2^3 \times 11 \times 13$ et $17017 = 7 \times 11 \times 13 \times 17$ donc nous pouvons éliminer les facteurs 11 et 13 communs au numérateur et au dénominateur.

$$\frac{1144}{17017} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 11 \times 13}{7 \times 11 \times 13 \times 17} = \frac{2 \times 2 \times 2}{7 \times 17} = \frac{8}{119}$$

→| Exercice 6

4. Plus grand diviseur commun et plus petit commun multiple

Définition

Le **plus grand diviseur commun** de deux entiers est le plus grand entier qui divise ces deux nombres.

Le **plus petit commun multiple** de deux entiers est le plus petit entier que ces deux nombres divisent.

Méthode 7

Déterminons le plus grand diviseur commun de 168 et 180 puis le plus petit commun multiple de 168 et 180.

On décompose ces deux entiers en produit de facteurs premiers. $168 = 2^3 \times 3 \times 7$ et $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$. Pour chaque facteur commun aux deux décompositions (2 et 3), on garde la plus petite puissance qui intervient. Pour le facteur 2 c'est 2^2 et pour le facteur 3 c'est $3 = 3^1$.

Alors le plus grand diviseur commun de 168 et 180 est $2^2 \times 3^1 = 12$.

Pour chaque facteur intervenant dans l'une ou l'autre des deux décompositions (2, 3, 5 et 7), on garde la plus grande puissance qui intervient. Pour le facteur 2 c'est 2^3, pour le facteur 3 c'est 3^2, pour le facteur 5 c'est 5^1, pour le facteur 7 c'est 7^1. Alors le plus petit commun multiple de 168 et 180 est $2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2520$.

→| Exercice 7

5. Démontrer des propriétés

Méthode 8

Montrons que

1. la somme de deux multiples d'un entier est un multiple de cet entier.
2. le carré d'un entier pair est un entier pair.

1. Soient a_1 et a_2 deux multiples de b alors il existe deux entiers q_1 et q_2 tels que $a_1 = b \times q_1$ et $a_2 = b \times q_2$ donc
   $a_1 + a_2 = b \times q_1 + b \times q_2 = b(q_1 + q_2)$
   $a_1 + a_2$ est donc de la forme $b \times q$ avec $q = q_1 + q_2$ entier donc $a_1 + a_2$ est un multiple de b.
2. Soit a un entier pair alors il existe un entier q tel que $a = 2q$.
   $a^2 = (2q)^2 = 4q^2 = 2(2q^2)$
   a^2 est donc de la forme $2q'$ avec $q' = 2q^2$ entier donc a^2 est pair.

→| Exercice 8

Cours

EXERCICES

EXERCICE 1 **Difficulté :** ●○○ **Durée :** 20 min

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
Tu justifieras ta réponse.

20 est un multiple de 5
15 est un multiple de 30
35 est un multiple de 8
52 est un multiple de 13
55 est un multiple de 5
72 est un multiple de 6

6 est un diviseur de 42
12 est un diviseur de 48
7 est un diviseur de 23
5 est un diviseur de 457
9 est un diviseur de 81
3 est un diviseur de 923

EXERCICE 2 **Difficulté :** ●●● **Durée :** 50 min

1. Soit n un entier, détermine la parité des entiers ci-dessous.
$B=3(6n+5)-4$ $\quad C=2(3n+5)+4(n-1)$ $\quad D=(n+3)^2-n^2$
2. Soit n un entier, montre que les entiers ci-dessous sont multiples de 7.
$E=-18+5(14n-9)$ $\quad F=(3n+8)(6n-5)-(4n^2+5n-5)$

EXERCICE 3 **Difficulté :** ●○○ **Durée :** 30 min

Détermine, en le justifiant, si les entiers 101, 187 et 409 sont premiers.

EXERCICE 4 **Difficulté :** ●○○ **Durée :** 30 min

Décompose les entiers 120, 495 et 1911 en produit de facteurs premiers.

EXERCICE 5 **Difficulté :** ●●○ **Durée :** 45 min

Détermine l'ensemble des diviseurs des entiers 20, 225 et 847.

EXERCICE 6 **Difficulté :** ●○○ **Durée :** 30 min

Détermine les fractions irréductibles égales aux fractions suivantes.
$\frac{650}{182}$, $\frac{154}{132}$ et $\frac{399}{462}$.

Exercices

EXERCICE 7 **Difficulté :** ●●○ **Durée :** 40 min

1. Détermine le plus grand commun diviseur de 450 et 945 puis le plus petit commun multiple de 450 et 315.

2. Un rectangle a pour dimensions 450 et 945 millimètres. On le découpe de façon à n'obtenir que des carrés identiques.

   Quelle est la taille maximale de ces carrés ?

   Combien de tels carrés a-t-on obtenus par découpage ?

3. Axel et Bilal ont construit chacun une tour de même hauteur à l'aide de blocs différents. Ceux d'Axel mesurent 450 millimètres de haut et ceux de Bilal mesurent 945 millimètres de haut.

   Quelle est la hauteur minimale de cette tour ?

   Combien de blocs Axel et Bilal ont-ils utilisés pour réaliser leurs tours ?

EXERCICE 8 **Difficulté :** ●●● **Durée :** 40 min

1. Montre que la différence de deux multiples d'un entier est un multiple de cet entier.

2. Montre que la somme de deux entiers impairs est un entier pair.

3. Montre que le produit d'un entier pair et d'un entier impair est un entier pair.

4. Montre que le carré d'un entier impair est un entier impair.