mini manuel

Mathématiques financières

mini manuel

Mathématiques financières

2e édition

- L'essentiel du cours
- Exercices corrigés
- Sujet d'examen

Benjamin Legros

DUNOD

Éditorial : Marie-Cécile de Vienne et Andréa Lawson
Fabrication : Martine Pierron
Couverture : Elizabeth Riba
Mise en pages : Lumina Datamatics

NOUS NOUS ENGAGEONS EN FAVEUR DE L'ENVIRONNEMENT :

PAPIER CERTIFIÉ

Nos livres sont imprimés sur des papiers certifiés pour réduire notre impact sur l'environnement.

Le format de nos ouvrages est pensé afin d'optimiser l'utilisation du papier.

Depuis plus de 30 ans, nous imprimons 70 % de nos livres en France et 25 % en Europe et nous mettons tout en œuvre pour augmenter cet engagement auprès des imprimeurs français.

Nous limitons l'utilisation du plastique sur nos ouvrages (film sur les couvertures et les livres).

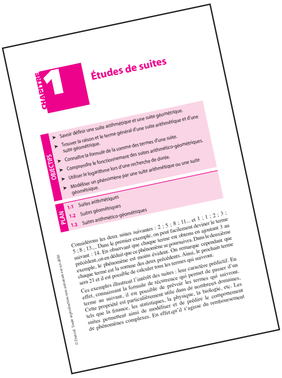
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-085903-0

Table des matières

Partie 2

Les projets d'investissement

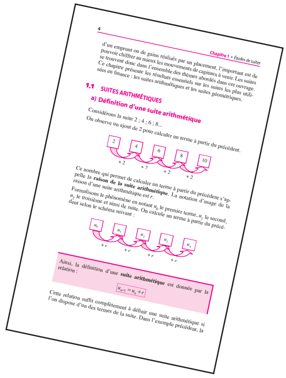
La page d'entrée de chapitre



Elle donne le plan du cours,
ainsi qu'un rappel des objectifs
pédagogiques du chapitre.

Le cours

Le cours, concis et structuré,
expose les notions importantes
du programme.

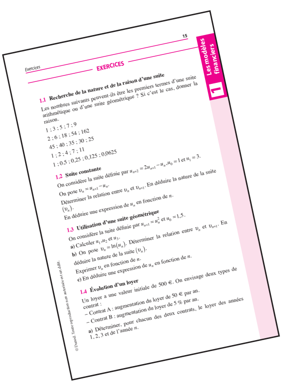


Les rubriques

Une erreur à éviter

Un peu de méthode

Les points clés à retenir



Les exercices

Ils sont proposés en fin de chapitre,
avec leur solution, pour se tester tout
au long de l'année.

Le sujet d'examen

Situé à la fin de l'ouvrage, il permet
de s'entraîner dans les conditions de
l'examen.

PARTIE 1 Les modèles financiers

Vous vous demandez comment évaluer un placement financier, ce qu'un gain à venir représente dans le bilan d'une entreprise ou encore comment un taux d'intérêt est déterminé ? Vous souhaitez comprendre les mécanismes qui régissent un emprunt ? Dans la première partie de cet ouvrage, vous découvrirez les aspects essentiels du calcul financier, appliqués aux différents points de vue du particulier, de l'entreprise ou de la banque. Le premier chapitre, intitulé « Études de suites », établit les fondements mathématiques nécessaires à la compréhension des formules de la finance. Les résultats obtenus dans ce chapitre se retrouveront dans l'ensemble du livre. Le deuxième chapitre, « Intérêts simples et escompte », permet d'évaluer les placements de courte durée sur des comptes réglementés tels que le Livret A, tout en abordant le fonctionnement de l'escompte pour les entreprises. Le troisième chapitre, « Intérêts composés », présente le calcul des placements de longue durée et de l'actualisation. L'une des applications essentielles de ce chapitre est le calcul des rentes, qui permet de comprendre le fonctionnement d'une retraite par capitalisation. Enfin, le quatrième chapitre, « Emprunts indivis », modélise les échanges financiers entre le prêteur et l'emprunteur, en intégrant les aspects comptables de l'emprunt.

CHAPITRE 1

Études de suites

OBJECTIFS

- Savoir définir une suite arithmétique et une suite géométrique.
- Trouver la raison et le terme général d'une suite arithmétique et d'une suite géométrique.
- Connaître la formule de la somme des termes d'une suite.
- Comprendre le fonctionnement des suites arithmético-géométriques.
- Utiliser le logarithme lors d'une recherche de durée.
- Modéliser un phénomène par une suite arithmétique ou une suite géométrique.

PLAN

Considérons les deux suites suivantes : 2 ; 5 ; 8 ; 11... et 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13.... Dans le premier exemple, on peut facilement deviner le terme suivant : 14. En observant que chaque terme est obtenu en ajoutant 3 au précédent, on en déduit que ce phénomène se poursuivra. Dans le deuxième exemple, le phénomène est moins évident. On remarque cependant que chaque terme est la somme des deux précédents. Ainsi, le prochain terme sera 21 et il est possible de calculer tous les termes qui suivront.

Ces exemples illustrent l'intérêt des suites : leur caractère prédictif. En effet, connaissant la formule de récurrence qui permet de passer d'un terme au suivant, il est possible de prévoir les termes qui suivront. Cette propriété est particulièrement utile dans de nombreux domaines, tels que la finance, les statistiques, la physique, la biologie, etc. Les suites permettent ainsi de modéliser et de prédire le comportement de phénomènes complexes. En effet, qu'il s'agisse du remboursement d'un emprunt ou de gains réalisés par un placement, l'important est de pouvoir chiffrer au mieux les mouvements de capitaux à venir. Les suites se trouvent donc dans l'ensemble des thèmes abordés dans cet ouvrage. Ce chapitre présente les résultats essentiels sur les suites les plus utilisées en finance : les suites arithmétiques et les suites géométriques.

1.1 SUITES ARITHMÉTIQUES

a) Définition d'une suite arithmétique

Considérons la suite 2 ; 4 ; 6 ; 8...

On observe un ajout de 2 pour calculer un terme à partir du précédent.

$$\boxed{2} \xrightarrow{+2} \boxed{4} \xrightarrow{+2} \boxed{6} \xrightarrow{+2} \boxed{8} \xrightarrow{+2} \boxed{10}$$

Ce nombre qui permet de calculer un terme à partir du précédent s'appelle la **raison de la suite arithmétique**. La notation d'usage de la raison d'une suite arithmétique est r.

Formalisons le phénomène en notant u_0 le premier terme, u_1 le second, u_2 le troisième et ainsi de suite. On calcule un terme à partir du précédent selon le schéma suivant :

$$\boxed{u_0} \xrightarrow{+r} \boxed{u_1} \xrightarrow{+r} \boxed{u_2} \xrightarrow{+r} \boxed{u_3} \xrightarrow{+r} \boxed{u_4}$$

Ainsi, la définition d'une **suite arithmétique** est donnée par la relation :

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$$

Cette relation suffit complètement à définir une suite arithmétique si l'on dispose d'un des termes de la suite. Dans l'exemple précédent, la connaissance de « $u_0 = 2$ » et de la relation « $u_{n+1} = u_n + 2$ » permet de calculer pas à pas l'ensemble des termes de la suite.

b) Comment calculer un terme d'une suite arithmétique ?

La relation précédente ne permet pas de calculer rapidement un terme d'une suite arithmétique. Si l'on souhaite calculer le 50^{e} terme, il est nécessaire de connaître le 49^{e} qui, lui-même, se calcule à partir du 48^{e} et ainsi de suite. Ainsi, pour atteindre le 50^{e} terme, il sera nécessaire d'effectuer un grand nombre de calculs. C'est pour cela qu'il est essentiel de mettre en place une formule générale qui fournit n'importe quel terme indépendamment du précédent.

Pour construire cette formule, on peut partir de la définition suivante pour calculer u_1 : $u_1 = u_0 + r$

De même pour calculer u_2 :

$$u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2 \times r$$

Puis :

$$u_3 = u_2 + r = (u_0 + 2 \times r) + r = u_0 + 3 \times r$$

Ces premiers résultats induisent une **formule générale** :

$$\boxed{u_n = u_0 + n \times r}$$

Remarque : la démarche présentée induit la formule mais n'a pas valeur de démonstration mathématique. Une démonstration rigoureuse utiliserait le principe de récurrence.

Si l'on ne dispose pas du terme u_0 mais d'un autre terme u_k, le terme général d'une suite arithmétique est donné par la relation suivante :

$$\boxed{u_n = u_k + (n - k) \times r}$$

Exemple

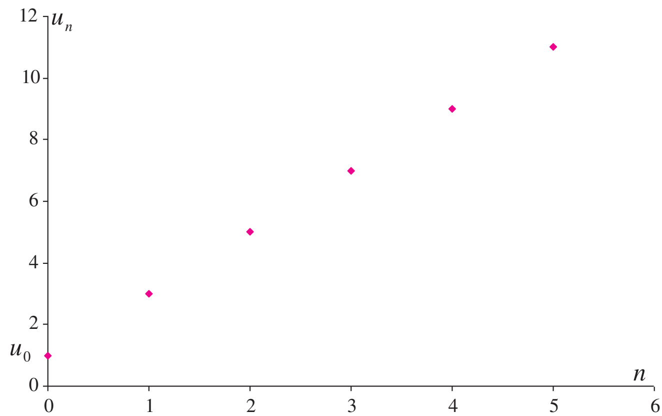
Cherchons le terme général de la suite arithmétique de raison 3 sachant que $u_5 = 22$.

Par application de la formule précédente avec $k = 5$, on trouve :

$$\begin{aligned} u_n &= u_5 + (n-5) \times 3 = 22 + (n-5) \times 3 = 22 + 3 \times n - 15 \\ &= 7 + 3 \times n \end{aligned}$$

c) Représentation graphique et sens de variation

Les termes successifs d'une suite arithmétique peuvent être représentés graphiquement. Les points représentés sont alignés sur une droite de pente r et d'ordonnée à l'origine u_0.



Le sens de variation d'une suite arithmétique dépend de sa raison :

– si $r > 0$ la suite est croissante ;

– si $r < 0$ la suite est décroissante ;

– si $r = 0$ la suite est constante.

d) Somme des termes d'une suite arithmétique

On peut chercher à cumuler les termes d'une suite. Ce calcul a un intérêt dès que l'on souhaite cumuler des valeurs.

On cherche à calculer : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

En écrivant cette somme « à l'envers » on trouve :

$$S = u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \cdots + u_0$$

Ainsi, en additionnant les deux lignes précédentes, terme à terme, on trouve :

$$2 \times S = (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + (u_2 + u_{n-2}) + \cdots + (u_n + u_0)$$

À première vue, ce regroupement peut sembler artificiel mais la remarque suivante va simplifier l'expression.

On a $u_0 + u_n = u_0 + u_0 + n \times r = 2 \times u_0 + n \times r$

$$u_1 + u_{n-1} = u_0 + r + u_0 + (n-1) \times r = 2 \times u_0 + n \times r = u_0 + u_n$$

$$\begin{aligned} u_2 + u_{n-2} &= u_0 + 2 \times r + u_0 + (n-2) \times r = 2 \times u_0 + n \times r \\ &= u_0 + u_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_k + u_{n-k} &= u_0 + k \times r + u_0 + (n-k) \times r = 2 \times u_0 + n \times r \\ &= u_0 + u_n \end{aligned}$$

Ainsi, chaque terme de la somme est égal à $u_0 + u_n$, et nous pouvons en déduire que :

$$2 \times S = \underbrace{(u_0 + u_n) + (u_0 + u_n) + \cdots + (u_0 + u_n)}_{n+1 \textit{ fois}}$$

En remarquant que cette somme est constituée de $n+1$ termes identiques, nous obtenons :

$$2 \times S = (n+1) \times (u_0 + u_n)$$

La formule de la somme est donc :

$$\boxed{S = \frac{(u_0 + u_n) \times (n+1)}{2}}$$

Cette formule nécessite de connaître u_0, on peut généraliser l'expression ainsi :

$$\boxed{S = \frac{\left(1^{er} \text{ terme} + \text{dernier terme}\right) \times \text{Nombre de terme}}{2}}$$

Remarque : cette dernière formule évite le problème des indices des suites et les questions du type *que faire si le premier terme n'est pas u_0 mais u_1 ?*

Exemple

Calcul de la somme des 100 premiers entiers :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = S$$

La suite des entiers naturels est arithmétique de raison 1. Le premier terme est 1, le dernier est 100 et le nombre de termes est 100. Ainsi :

$$S = \frac{(100+1) \times 100}{2} = 101 \times 50 = 5\,050$$

e) En pratique où trouve-t-on des suites arithmétiques ?

Les suites arithmétiques se trouvent dans les phénomènes pour lesquels on envisage un ajout ou un retrait d'une même valeur à chaque période.

Exemples

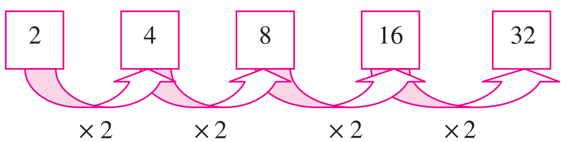
- Un loyer augmente de 400 € par mois.
- On retire 500 € de son compte tous les ans.
- Une production augmente de 100 unités par jour.
- Les intérêts sont simples.

1.2 SUITES GÉOMÉTRIQUES

a) Définition d'une suite géométrique

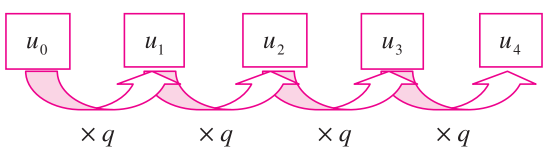
Considérons la suite 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32…

Cette suite commence comme la suite arithmétique 2 ; 4 ; 6 ; 8… mais elle augmente beaucoup plus vite. En effet, pour calculer un terme à partir du précédent, on multiplie par 2 selon le schéma suivant :



Ce nombre qui permet de calculer un terme à partir du précédent s'appelle la **raison de la suite géométrique** dont la notation d'usage est q.

Formalisons le phénomène en notant u_0 le premier terme, u_1 le deuxième, u_2 le troisième et ainsi de suite. On calcule un terme à partir du précédent selon le schéma suivant :



Ainsi la définition d'une **suite géométrique** est donnée par la relation :

$$\boxed{u_{n+1} = q \times u_n}$$

Remarque : cette relation suffit complètement à définir une suite géométrique si l'on dispose d'un des termes de la suite. Ainsi dans l'exemple précédent la connaissance de « $u_0 = 2$ » et de la relation « $u_{n+1} = 2 \times u_n$ » permet de calculer pas à pas l'ensemble des termes de la suite.

b) Comment calculer simplement un terme d'une suite géométrique ?

Comme pour les suites arithmétiques, il est utile de disposer d'une relation permettant de calculer n'importe quel terme d'une suite géométrique indépendamment.

La définition d'une suite géométrique permet de calculer $u_1 = q \times u_0$.

De même $u_2 = q \times u_1 = q \times (q \times u_0) = q^2 \times u_0$

et $u_3 = q \times u_2 = q \times (q^2 \times u_0) = q^2 \times u_0$

Ces premières observations induisent la formule du **terme général** d'une suite géométrique à l'aide du premier terme :

$$\boxed{u_n = q^n \times u_0}$$

Si l'on ne dispose pas du premier terme, la formule suivante est utile :

$$\boxed{u_n = q^{n-k} \times u_k}$$

Exemple

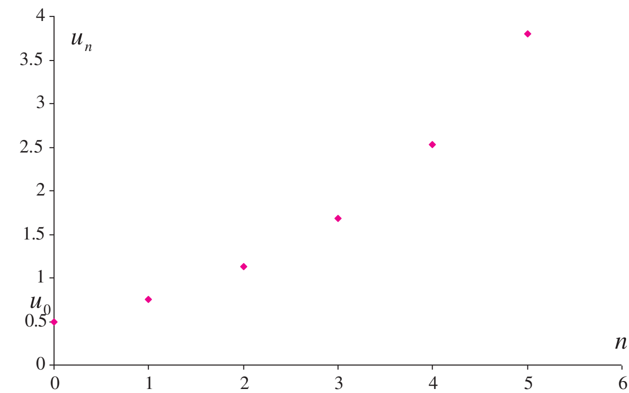
On cherche à donner le terme général d'une suite géométrique de raison 5 sachant que $u_3 = 625$. En appliquant la formule précédente à $k = 3$, on trouve :

$$u_n = 5^{n-3} \times u_3 = 5^{n-3} \times 625 = 5^{n-3} \times 5^4 = 5^{n+1}$$

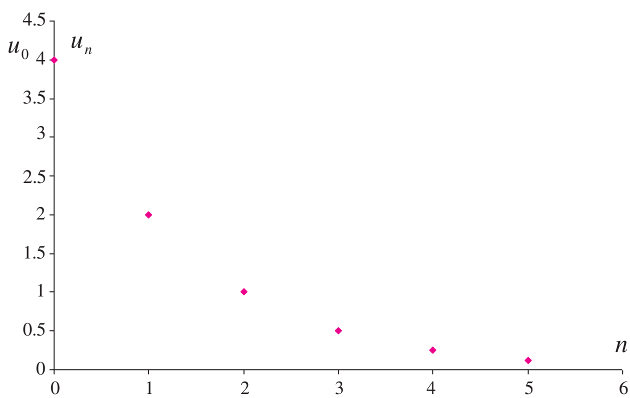
c) Représentation graphique et sens de variations

Les points représentatifs d'une suite géométrique représentent une courbe de type « exponentielle ». Le sens de variation et la convergence de la suite sont donnés par la valeur de la raison q.

– Si $q > 1$ la suite est croissante et non convergente.
– Si $q = 1$ la suite est constante.
– Si $0 < q < 1$ la suite est décroissante et converge vers 0.
– Si $q = 0$ la suite est constante.
– Si $q < 0$ la suite n'est ni croissante ni décroissante.



Suite géométrique avec $q > 1$



Suite géométrique avec $0 < q < 1$

d) Somme des termes d'une suite géométrique

Comme pour les suites arithmétiques, il est utile de connaître une formule permettant de calculer simplement la somme des termes d'une suite géométrique.

On cherche à calculer $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$

On a : $q \times S = q \times u_0 + q \times u_1 + q \times u_2 + \cdots + q \times u_n$

or : $u_1 = q \times u_0$, $u_2 = q \times u_1, \ldots$, et $u_{n+1} = q \times u_n$

ainsi :

$$q \times S = u_1 + u_2 + u_3 \cdots + u_{n+1}$$

Nous remarquons que cette expression est proche de celle de S, d'où $q \times S - S = u_{n+1} - u_0$

La plupart des termes disparaissent par soustraction.

Ainsi $(q-1) \times S = u_{n+1} - u_0$

et si $q \neq 1$ alors $S = \dfrac{u_{n+1} - u_0}{q-1}$

or $u_{n+1} = q^{n+1} \times u_0$ donc $S = \dfrac{q^{n+1} \times u_0 - u_0}{q-1}$

et en factorisant par u_0 :

$$\boxed{S = \frac{q^{n+1} - 1}{q-1} \times u_0}$$

On retient cette formule plus générale qui ne nécessite pas de commencer la somme à u_0 :

$$\boxed{S = \frac{q^{\text{Nombre de termes}} - 1}{q-1} \times 1^{\text{er}} \text{ terme}}$$

Remarque : Les deux formules précédentes ne sont valables que pour $q \neq 1$. Le cas où $q = 1$ revient au cas d'une suite géométrique de raison 1 ; autrement dit d'une suite constante. La somme des termes est par conséquent égale à un terme de la suite multiplié par le nombre de termes de la somme.

e) En pratique, où trouve-t-on des suites géométriques ?

Les suites géométriques interviennent dans les phénomènes pour lesquels on envisage une multiplication par un facteur constant à chaque période.

Exemples

- Une production baisse de 2 % par mois.
- Un salaire augmente de 10 % par an.

- L'entreprise double de volume tous les ans.
- Les intérêts sont composés.

Remarque : Une augmentation de 10 % se traduit par une multiplication par 1,1. Une baisse de 2 % se traduit par une multiplication par 0,98. De façon générale, une augmentation de t % se traduit par une multiplication par $1+t$ %, et une baisse de t % se traduit par une multiplication par $1-t$ %.

Résoudre une équation comportant une puissance

Ce type d'équations se rencontre dans la recherche de durées, pour répondre à des questions du type « au bout de combien de temps... ? »

Dans les suites géométriques, le temps « n » se trouve en exposant. En cherchant à isoler n on va finir par trouver une équation du type $a^n = b$.

La méthode pour poursuivre la résolution est l'utilisation du **logarithme** de manière à linéariser l'équation. On a $\ln(a^n) = \ln(b)$ qui, par propriété du logarithme, donne $n \times \ln(a) = \ln(b)$ et ainsi $\boxed{n = \dfrac{\ln(b)}{\ln(a)}}$

L'utilisation d'une racine n-*ième* ne permet pas de trouver la solution car, si $= a^n = b$, on a $a = b^{\frac{1}{n}}$

On utilise ainsi une expression de b en fonction de a pour construire une expression de a en fonction de b qui ne sert pas à isoler n.

1.3 SUITES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES

Les **suites arithmético-géométriques** se définissent par la relation :

$$\boxed{u_{n+1} = a \times u_n + b}$$

Ces suites peuvent être des suites arithmétiques lorsque $a = 1$, et des suites géométriques lorsque $b = 0$.

On cherche à déterminer le terme général d'une suite arithmético-géométrique. La méthode est la suivante.

1. Recherche du point fixe de la relation $u_{n+1} = a \times u_n + b$

On remplace u_n et u_{n+1} par x : $x = ax + b$ ainsi $x(1-a) = b$ et si $a \neq 1$ on a $x = \dfrac{b}{1-a}$. Le cas $a = 1$ est celui d'une suite arithmétique, il ne présente donc pas d'intérêts dans cette partie. On supposera par conséquent pour la suite que $a \neq 1$.

2. Introduction d'une suite auxiliaire $v_n = u_n - x = u_n - \dfrac{b}{1-a}$

On a donc $u_n = v_n + \dfrac{b}{1-a}$ et $u_{n+1} = v_{n+1} + \dfrac{b}{1-a}$

par conséquent $v_{n+1} + \dfrac{b}{1-a} = a\left(v_n + \dfrac{b}{1-a}\right) + b$

donc $v_{n+1} + \dfrac{b}{1-a} = av_n + \dfrac{ab}{1-a} + b$

et $v_{n+1} + \dfrac{b}{1-a} = av_n + \dfrac{ab + b(1-a)}{1-a}$

donc $v_{n+1} + \dfrac{b}{1-a} = av_n + \dfrac{b}{1-a}$

et ainsi :

$$\boxed{v_{n+1} = av_n}$$

Cette suite est par conséquent une suite géométrique de raison a.

3. Terme général de u_n

Le terme général de la suite v_n en fonction de v_0 est donc $v_n = a^n \times v_0$.

Or $v_n = u_n - \dfrac{b}{1-a}$ et $v_0 = u_0 - \dfrac{b}{1-a}$

donc $u_n - \dfrac{b}{1-a} = a^n\left(u_0 - \dfrac{b}{1-a}\right)$

et ainsi :

$$\boxed{u_n = a^n\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}}$$

On peut déduire le terme général d'une suite arithmético-géométrique en fonction de u_k :

$$\boxed{u_n = a^{n-k}\left(u_k - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}}$$

Exemple

Déterminer le terme général de la suite définie par $u_{n+1} = 2u_n + 1$ et $u_0 = 0$. On a ainsi $a = 2, b = 1$ et $u_0 = 0$. Par conséquent, $u_n = 2^n\left(0 - \frac{1}{1-2}\right) + \frac{1}{1-2} = 2^n \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 2^{n-1} - \frac{1}{2}$

POINTS CLÉS

- Utilisation d'une suite arithmétique : ajout ou retrait d'une même valeur à chaque période.
- Utilisation d'une suite géométrique : multiplication par un même facteur à chaque période.
- Résumé des formules :

	Suite arithmétique	**Suite géométrique**
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
Terme général en fonction de u_0	$u_n = u_0 + n \times r$	$u_n = q^n \times u_0$
Terme général en fonction de u_k	$u_n = u_k + (n-k) \times r$	$u_n = q^{n-k} \times u_k$
Somme des termes	$S = \frac{(1^{\text{er}}\text{ terme} + \text{dernier terme}) \times \text{Nombre de termes}}{2}$	$S = \frac{q^{\text{Nombre de termes}} - 1}{q-1} \times 1^{\text{er}}\text{ terme}$

- Terme général d'une suite arithmético-géométrique :

$$u_n = a^{n-k}\left(u_k - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}$$

- Résolution d'une équation avec une puissance : on utilise le logarithme pour linéariser une équation du type $a^n = b$.

EXERCICES

1.1 Recherche de la nature et de la raison d'une suite

Les nombres suivants peuvent-ils être les premiers termes d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique ? Si c'est le cas, donner la raison.

1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9

2 ; 6 ; 18 ; 54 ; 162

45 ; 40 ; 35 ; 30 ; 25

1 ; 2 ; 4 ; 7 ; 11

1 ; 0,5 ; 0,25 ; 0,125 ; 0,0625

1.2 Suite constante

On considère la suite définie par $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n, u_0 = 1$ et $u_1 = 3$.

On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$.

Déterminer la relation entre v_n et v_{n+1}. En déduire la nature de la suite (v_n).

En déduire une expression de u_n en fonction de n.

1.3 Utilisation d'une suite géométrique

On considère la suite définie par $u_{n+1} = u_n^2$ et $u_0 = 1{,}5$.

a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

b) On pose $v_n = \ln(u_n)$. Déterminer la relation entre v_n et v_{n+1}. En déduire la nature de la suite (v_n).

Exprimer v_n en fonction de n.

c) En déduire une expression de u_n en fonction de n.

1.4 Évolution d'un loyer

Un loyer a une valeur initiale de 500 €. On envisage deux types de contrat :

– Contrat A : augmentation du loyer de 50 € par an.

– Contrat B : augmentation du loyer de 5 % par an.

a) Déterminer, pour chacun des deux contrats, le loyer des années 1, 2, 3 et de l'année n.

b) En cumulé sur 20 ans, combien aura-t-on payé dans chacun des contrats ?

c) Au bout de combien de temps le loyer aura-t-il doublé dans chacun des contrats ?

d) Quel contrat choisir (vous nuancerez la réponse selon la durée de votre séjour) ?

1.5 Relation quantité-prix

Le prix d'un produit diminue de 2 euros par mois et le nombre de produits vendus augmente de 1 000 par mois. Initialement il se vend 400 000 produits au prix de 300 euros.

a) Donner l'évolution du chiffre d'affaire dans 1, 2 et 3 mois.

b) En déduire une expression du chiffre d'affaire dans x mois.

c) Étudier le sens de variation de cette fonction et prédire l'évolution du chiffre d'affaire dans les prochains mois.

1.6 Limite sur un compte

Un particulier place chaque mois sur un compte sans intérêts une somme de 1 200 €. Chaque mois, il consomme une somme égale au quart de ce qu'il possède sur son compte. Initialement on suppose que son compte est vide. On notera M_n le montant sur le compte à la fin du mois n.

a) Exprimer le montant sur son compte en fin de mois, les mois 1, 2 et 3.

b) Exprimer M_{n+1} en fonction de M_n. En déduire une expression de M_n en fonction de n.

c) Y a-t-il une limite au montant sur le compte de cet individu ?

SOLUTIONS

1.1 Recherche de la nature et de la raison d'une suite

Les nombres sont les premiers termes d'une suite arithmétique de raison 2.

Les nombres sont les premiers termes d'une suite géométrique de raison 3.

Les nombres sont les premiers termes d'une suite arithmétique de raison –5.

La variation relative n'est pas constante, la suite n'est pas géométrique.

Les nombres ne sont pas les premiers termes d'une suite arithmétique ni d'une suite géométrique.

Les nombres sont les premiers termes d'une suite géométrique de raison 0,5.

1.2 Suite constante

Exprimons υ_{n+1} en fonction de υ_n. Nous avons $\upsilon_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n = \upsilon_n$. La suite (υ_n) est donc une suite constante égale à 2.

Nous déduisons de la question précédente que $u_{n+1} = u_n + 2$. La suite (u_n) est donc une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1. Ainsi, nous pouvons donner le terme général de la suite (u_n) ; $u_n = 1 + 2n$.

1.3 Utilisation d'une suite géométrique

a) Nous calculons les premiers termes de la suite en appliquant la relation de récurrence proposée. Ceci donne $u_1 = 2{,}25$, $u_2 = 5{,}0625$ et $u_3 = 25{,}6298$.

b) Exprimons υ_{n+1} en fonction de υ_n. On a $\upsilon_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n^2) = 2\ln(u_n) = 2\upsilon_n$. La suite (υ_n) est donc une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $\upsilon_0 = \ln(1{,}5)$.

La question précédente permet d'exprimer le terme général de la suite (υ_n) : $\upsilon_n = \ln(1{,}5) \times 2^n$.

c) Le lien de définition reliant les deux suites permet d'exprimer u_n. On déduit donc que $u_n = e^{\upsilon_n} = e^{\ln(1{,}5)\times 2^n} = 1{,}5^{2^n}$.

1.4 Évolution d'un loyer

a) Notons A_n le loyer avec le contrat A l'année n et B_n le loyer avec le contrat B l'année n.

Nous avons ainsi $A_0 = 500 = B_0$, $A_1 = A_0 + 50 = 550$, $A_2 = A_1 + 50 = 600$ et $A_3 = A_2 + 50 = 650$.

Nous remarquons que la suite (A_n) est une suite arithmétique de raison 50 et de premier terme 500, par conséquent $A_n = 500 + 50 \times n$.

On a $B_1 = 1{,}05 \times B_0 = 525$, $B_2 = 1{,}05 \times B_1 = 551{,}25$ et $B_3 = 1{,}05 \times B_2 = 578{,}8125$.

La suite (B_n) est une suite géométrique de raison 1,05 et de premier terme 500 ; par conséquent $B_n = 1{,}05^n \times 500$.